日文教育資料[算数・中学校数学]

算数・数学情報誌

Root ルート

2014
No.15

Contents

未来をになう子どもたちへ
日本文教出版

「説明すること」の指導

教師への４つのメッセージ

環太平洋大学　学長　**中原　忠男**

1．何のための説明か

今日，算数・数学科の授業において教師から「○○について説明してください。」というような発言がよくなされます。ところで，このとき何のために，説明を求めているのでしょうか。これについて，まずは次のような答えが考えられます。

A1．クラスのみんなに説明内容を伝え，理解を得るため A2．その上で，クラスのみんなに正否の判断，よりよい説明，修正などを求めたりするため

しかし，こうした理由だけであれば，何も子どもたちに説明を求めなくても，教師が説明をしてもよいはずです。子どもたちに説明を求めるからには，さらに深い理由があると考えられます。

それを考えると，次のような教師の授業観・指導観が浮かび上がってきます。

B1．子ども主体の授業にしたい。

さらに，次のような答えも返ってくると考えられます。

C1．子どもたちの思考力を育成したい。 C2．子どもたちの表現力を育成したい。 C3．子どもたちの説明力を育成したい。

このように説明を求める理由・ねらいはさまざまなもの，さまざまなレベルが考えられます。

もちろん，これらは排他的なものではなく，共存的なものです。しかし，理由・ねらいによって説明することの指導もさまざまな論が展開されることとなります。そこで，何のための説明か，まずはこれを十分に踏まえてその指導に当たることが求められます。

ここでは，近年，重視されているＣレベルの理由・ねらいに焦点を当てて，以下の稿を進めていくこととします。

2．説明できるために必要なものは何か

説明活動には記述によるもの，口頭によるもの，両者をあわせたものなどがあります。いずれの場合においても，説明できるためには，説明する内容について考え，表現することが必要になってきます。このことから，説明力を育成するためには，まずは思考力，表現力の育成が必要であることが分かります。

思考力と表現力が備われば説明力がつくかと言うこと，それだけでは十分ではありません。説明活動，とりわけ口頭による場合には度胸とか，場慣れとか，聞き手に応じた対応などが求められるからです。

それを踏まえて，思考力，表現力，説明力のある子どもたち，３者の関係を考えると図１のようになると考えられます。

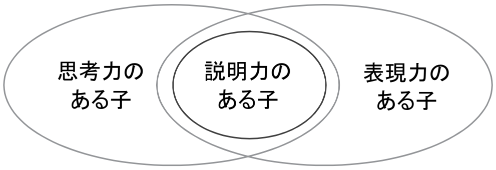


図１. 思考力・表現力・説明力の
ある子どもたちの関係

図１は，説明力のある子は思考力と表現力のある子の共通領域の真の部分に位置付くことを表しています。思考力・表現力が培われ，さらに説明力固有のものがプラスされて初めて説明力が発揮されることになるからです。それ故に，説明力は高レベルの力であり，子どもたちにとって説明することはやさしいことではありません。

また，その３つの力を発揮したり，培ったりする場は線形的なものではなく，次のように相互作用的なものと考えられます。

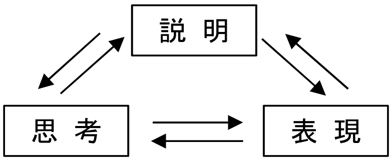


図２. 思考・表現・説明の相互作用性

例えば，ある問題の解決方法を考えつきます。それを数学的に表現します。表現すると解決方法の不備に気づき，そこで，反省的に思考を進めます。こうしたことはよく行われることであり，思考と表現の相互作用性を示しています。そうしたことは，思考と説明,表現と説明の間でも生じます。

３つの活動や力の関係はそのように捉えられます。しかし，算数・数学科における説明力はその基盤となる思考力・表現力が大きく関わるものであり，まずはそこに力を入れていくことが重要と考えます。

そこで，思考力・表現力について説明力との関わりで，とりわけ以下の２つのことをここでは押さえておきたいと思います。

３．演繹的推論とは何か

算数・数学科において育成すべき重要な思考力は論理的思考力です。なかでも，演繹的推論による思考力，そして表現力，説明力の育成が課題です。これに関して，かねてから気になっていることがあります。それは演繹的推論についての説明であり，それに伴い演繹的推論がどのように理解されているかということです。

例えば，以下の例①，②の推論において，横線の上のことを真として，それらから横線の下のことを導く推論は演繹的推論か否かについて考えてみて下さい。

例①　$x=2$ ならば　$x^2=4$
　　　$x=2$
　　　―――――――
　　　$x^2=4$

例②　犯人ならばアリバイがない。
　　　A 氏にはアリバイがない。
　　　―――――――
　　　A 氏は犯人だ。

文科省の指導要領解説の算数編では，これについて次のように記されています。

「演繹的に考えるとは，すでに正しいことが明らかになっている事柄を基にして別の新しい事柄が正しいことを説明していくことである。」（*1，p.159）　また，中学校数学編の解説では次のように説明されています。

「演繹は，前提となる命題から論理の規則に従って必然的な結論を導き出す推論である。」（*1，p.29）

演繹的推論の手短な説明としてはこのような表現にならざるをえないでしょう。しかし，これで演繹的推論であるか否かの判断がきちんとできるでしょうか。さらに，それについてしっかりした理解や捉え方がなされているでしょうか。

演繹的推論は数学の証明で使用される非常に重要な推論です。従って，それを指導する教師側にはきちんとした捉え方が期待されます。そこで，これについて少し立ち入って考えていきます。

命題 $p_1, p_2, \cdots p_n$ を仮定として，命題 q を結論として導く推論を右のような形式で表します。

$$\frac{p_1, p_2, \cdots p_n}{q}$$

ここで推論形式のなかには，仮定がすべて真のとき，結論が必ず真になるものがあり，これを妥当な推論形式といいます。**この妥当な推論形式を用いる推論を演繹的推論というのです。**先の「論理の法則」はこの妥当な推論形式のことをいいます。論理語の「かつ」「または」「ならば」「でない」をそれぞれ「∧」「∨」「→」「～」で表すと，次のようなものが妥当な推論形式の典型的なものです。

〈肯定式〉

$$\frac{p \to q \quad p}{q}$$

〈否定式〉

$$\frac{p \to q \quad \sim q}{\sim p}$$

〈合接〉

$$\frac{p \quad q}{p \wedge q}$$

〈仮言的三段論法〉

$$\frac{p \to q \quad q \to r}{p \to r}$$

これらが何故に妥当な推論形式であるかは論理語の使い方，定義に依拠しています。命題の真を「T」，偽を「F」で表すと，前述の論理語は次のように定義されます。

p	q	p∧q	p∨q	p→q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

p	～p
T	F
F	T

これを基に，真理表を作成して推論形式の真偽を調べることができます。例えば〈肯定式〉の真理表は次のようになります。

p	q	p→q	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

この表から，仮定がすべて真（T）となるのは1行目だけであり，このとき，結論の q は真（T）になるので，この推論形式は妥当な推論であることが分かります。先の例①はこれを用いているので演繹的推論，他方で例②は妥当な推論形式を用いていないので演繹的推論でないことになります。

上記の判定法は形式的で明確なものです。他方で，我々人間はある推論が妥当か否かを感覚的に判断する力を身につけていくと言われています。これに従えば，用いた推論が妥当でないときには感覚的にノーというサインが発せられることになります。算数・数学科において，こうした感覚を育てていくことも重要となります。

4．算数と数学の違いは何か

最後に，演繹的推論との関わりで算数と数学の違い，そこから生じる子どもたちの戸惑いについて，メッセージを発しておきたいと思います。

算数では，以下のように，事例や図また

帰納的推論や類推的推論を用いて性質やきまりを導くことがよく行われます。

例③　三角形の内角の和

いくつかの三角形について内角を測り，それぞれの三角形の内角の和がおよそ 180 度になったことから，「三角形の３つの角の和は 180 度であること」を導く。

例④　奇数＋奇数＝偶数

２つの奇数は図で次のように表すことができる。

○○○ ‥ ○　　　○○ ‥ ○
○○○ ‥ ○○　　○○ ‥ ○○

これらを合わせると，左の最後の一つの○を右の最後の一つの○の上におくことができるので，和は偶数となる。

これらは算数においては，結論を導く方法，あるいは結論が成り立つことを説明する方法として認められています。従って，教師も子どももよく用います。しかし，数学においてはそうはいきません。

数学における性質，きまりや定理は公理を真としたときに，真となるものです。また，個別的なことではなく，概念全体に当てはまることを導き出します。それをきちんと示す方法として人類が考え出したのが，公理，定義から演繹的推論を用い，文字を用いて命題を証明する方法です。

算数においてはある事柄が成り立つことは事例や図によって説明され，帰納的推論や類推的推論によって説明されれば十分です。しかし，**数学の証明においてはそれらは可とされず，演繹的推論や文字を用いることが求められます**。この点が算数と数学の大きな違いです。

この違いは論理的には大きな違いですが，心理的にはデリケートです。従って，子どもたちには区別がつきにくく，中学生は大きな戸惑い，困難を感じます。これまで算数で理由や根拠を説明しなさいと言われた際に可とされていたことが，数学の証明ではノーとされるからです。

先に示した例③，④のように，事例や図による説明は，子どもたちにとって分かりやすいものです。数学では平行線の性質を用いて三角形の内角の和が１８０度であることを証明する方法が指導されます。しかし，子どもたちにとっては，「三角形の内角の和が１８０度である」ことの方が「平行線の性質」よりもはるかによく分かっていることです。ですから，証明とは「よく分からないこと」を用いて「よく分かっていること」を示すこと，という印象になりかねません。

この課題にはこれまで多くの取り組みがなされています。しかし，満足できる解決は未だ見いだされておりません。読者諸賢の創意工夫に期待したいと思います。

引用・参考文献
*1 中原忠男編集『算数・数学科重要用語 300 の基礎知識』(2000)，明治図書

「説明すること」の指導

「文字を使った説明」の指導
−形式的計算と意味の解釈を中心に−

福岡教育大学　教授　清 水　紀 宏

1　はじめに

文字を使った説明に関連して，文部科学省の『中学校学習指導要領解説数学編』（2008）では，「文字を用いた式でとらえ説明できること」や「目的に応じた式の変形」について解説されています[*1]。

本稿では，具体的な問題の例を通して「文字を使った説明」の指導について考えます。

2　括弧をつけること

Q1　直方体の３つの辺の長さを a,b,c，体積をＶとする。a,b,c,Ｖの関係を文字式で表せ。

まず，V=abc という解答が考えられます。この式は，「（直方体という図形が３つの辺を決めれば決まることから）直方体の体積は a, b, c で決まり，それは積 abc である。」ことが表現されています。

他方，Ｖ＝（ab）c という表現も可能です。この表現の括弧は長さが a，b の２辺をもつ長方形の面積と残りの辺の長さ c の積と「みる」ことができます。このことは，直方体の体積を「（底面積）×（高さ）」すなわち柱体の体積の求積とみていることに他なりません。裏を返せば，V=abc という表現は，直方体の体積の求積において，どの辺も公平に扱っているともいえます。

この例からわかることは，括弧があるかないかだけでも，その式の意味に異なる解釈を与えることができるということです。計算の順序という観点だけでなく，何らかの意味を付与する（しない）という観点から，括弧をつける（つけない）ということを授業で意識して頂ければと思います。

3　形式的計算と意味の解釈

Q2　連続する３つの自然数の和が３の倍数であることを示せ。

A1　真ん中の数を n とすると，３つの数の和は（n − 1）＋ n ＋（n ＋ 1）＝ 3n。よって，連続する３つの自然数の和は３の倍数である。
（ここでも，n − 1 と n ＋ 1 に括弧を付けることが大切です。）

A1 はエレガントな説明ですが，「真ん中の数を n とおく」というのは，この問題を知っている（かなり見通せてる）人の発想ともいえます。素朴に，一番小さな数を n とおいてみましょう。

A2　一番小さな数を n とすると，３つの数の和は　n ＋（n ＋ 1）＋（n ＋ 2）

ここから踏むべきステップがいくつかあります。まず「ここで手をとめず，式を簡単にすること」が必要です。**式を簡単にで**

きるときは，とにもかくにも，できるだけ簡単な式に変形するという態度とそのことを実現する技能を身につけておく必要があります。実際は「簡単」の意味が問題なのですが，n＋（n＋1）＋（n＋2）よりも3n＋3の方が，簡単な式であることは納得されるでしょう。

つぎに，結果の3n＋3の意味を解釈することです。一つの方法は，「3n」も「3」も3の倍数であるので，その和も3の倍数であるという解釈です。誤りではありませんが，3の倍数の和が3の倍数であることを認めるかどうかが問題になります。より望ましい方法は，3n＋3を3で**括**(くく)**って**，3（n＋1）と変形する方法です。この変形が「形式的な変形」か「目的的な変形」かはその生徒の思考に依存するところですが，どちらにしても括弧で括ることがポイントになります。さらに，3（n＋1）が3の倍数であることを主張する根拠として，n＋1が自然数であることを意識し，そのことに言及する必要があります。n＋1が自然数であることは当たり前のことです。そうではなく，3（n＋1）は，「n＋1が自然数でなければ，3の倍数になり得ない」ということが、ここで問題になっていることを理解させる必要があります。実際，n＋1が2/3だと，3（n＋1）は2であり，3の倍数ではありません。

さて，一応の説明が終わった後に，結果をふり返ることも大切にしたい活動です。「連続する3つの自然数の和は3の倍数」という結果を「連続する3つの自然数の和は真ん中の数の3倍の数」ということにも気づいてほしいところです。このとき，教師側の模範解答の結果だけでなく，素朴な解答の結果を対置し，その共通点を問うことが有効であるように思います。

（n－1）＋n＋（n＋1）＝3n

n＋（n＋1）＋（n＋2）＝3（n＋1）

Q2において，問題場面の式による表現や，結果の解釈，その後のふり返りにあたっては、「連続する自然数」「倍数」などの意味を考えることが必要になります。他方，最初の式を簡単な式に変形することは形式的になされ得ることです。つまり，指導にあたっては，意味を考えさせるべきところと，形式的に処理できるところを明確にし，それぞれに必要な思考や技能や態度を育成していくことが大切です。

$\boxed{\text{Q3}}$　nを自然数とする。n^2＋nが奇数であることを示せ。

ここで，重要な式変形はnで**括る**ということです。因数分解を学習していない第2学年の段階では，発展的な内容となりますが，分配法則a（b＋c）＝ab＋acを活用すれば，nで括ることができます。これも形式的に行うことのできる式変形です。

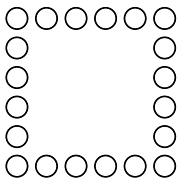
nで括って，n^2＋n＝n（n＋1）と変形するだけで，この数が「連続する2つの数の積であること」→「どちらかが偶数，どちらかが奇数であること」→「積が偶数であること」がわかります。このことは，n^2＋nという式を一生懸命睨(にら)み付けても，

なかなか気づきにくく，式を形式的に処理することのよさが出ています。この他にも，n^2+nが「nの倍数である」ことや「$n+1$の倍数である」こともわかります。

4　小学校と中学校の学習の相違

上で述べた「形式的処理」は，文字式のよさの一つであり，この処理の有無が小学校での文字の学習と中学校での文字式の学習との本質的な相違といえます。

Q4　○を正方形の形に並べました。
　これらの○の数を上手に数えよう。



○の数が20であることは数えればわかることです。そうではなく，正方形の１辺の○の数が多くなっても通用する（「上手に」の本意）数え方を考え，言葉や式で表現することがここでの主眼です。

式で表現すれば，例えば，次のようなAからEの考えがあります。

	（小５まで）	（中学校での表現）
A	６×２＋４×２	$2n+2(n-2)$
B	６＋５＋５＋４	$n+(n-1)+(n-1)+(n-2)$
C	６×４－４	$4n-4$
D	５×４	$4(n-1)$
E	６×６－４×４	$n^2-(n-2)^2$

左側の表現については、いつでも使えるようにするために，１辺の数（この問題では6）を使って式を表すことが大切です。例えば，Aは６×２＋４×２を６×２＋(6－2)×２と表していきます。小学校第６学年で文字による表現を学習すれば，６の代わりに文字で置き換えることで，（×の省略や２乗による表現などを除き）中学校での表現が実現できます。裏を返せば，授業がここに留まってしまうと，小学校と中学校の取り扱いに相違はないことになります。

中学校での学習では，これらの表現を簡単な式に変形することができます（Eだけが第３学年の範囲）。式を簡単にすると全て$4n-4$となります。全て同じ式になるのは当たり前のことなのですが，生徒にとってはちょっとした驚きのようです。

Cは多くの生徒が思い浮かぶ考えでしょうが，この考えが出ていなければ，結果の式$4n-4$を読み取ることで，「n個ずつ数えて，重複した角の４個を引く」という考えが見いだせます。

もしDの考えが生徒から出ていないときは，式変形のよさをアピールするチャンスです。$4n-4$を$4(n-1)$と変形して，このことを図で考えさせます。この式の結果から，n個ではなく，$n-1$個ずつ囲んでいくと，４回で全ての○を落ちや重なりなく囲むことができ，Dの考えが明確になります。小学校では，こうした展開は不可能です。例えば，Bの「６＋５＋５＋４」の考えに着目させ，「６個の塊から４個の塊に１個移動すれば，全て５個の塊になること」を図や式から気づかせる，という展開になります。

引用・参考文献

*1 文部科学省『中学校学習指導要領解説 数学編』（2008），pp.88-89，教育出版

「説明すること」の指導

探究活動としての図形の証明

岡山大学　准教授　**岡 崎　正 和**

1．証明の指導と証明することの指導

図形の証明の指導を考えるとき，「証明」の指導と「証明すること」の指導を区別してみたいと思います。小関らは証明の意義が理解できたという場合に次のことを挙げています [*1]。①「論証の一般性」の理解（定理は全称命題であること，証明には一般性があること，図は代表であること，実験・実測による方法の特徴の理解，「体系」（局所的な構造化）の理解），②「論証の仕組み」の理解（仮定・結論，証明の意味，根拠となることがら，定義の意味，循環論法は不合理であること）。しばしば証明指導は，書き方に重点が置かれる場合がありますが，これだけでは上のことはカバーできません。例えば，書き方だけを習得しても，証明の意義や必要性が分からなければ，帰納的な推論でもよいと考え続ける生徒がいることが，同じく小関らの研究で明らかにされています。問題が少し変わっただけで証明の書き方が生きて働かないことは全国学力・学習状況調査で明らかです。

従って，証明の形式的な指導に陥ることなく，証明を本来人間が行う探究活動として考えて，その中で証明の意味を培っていく必要があると思います（証明することの指導）。つまり，証明の必要性を感じ，前提や証拠を明らかにして，証明を構想し，人を説得したり自分の疑問や不思議さを納得させたりする活動です。

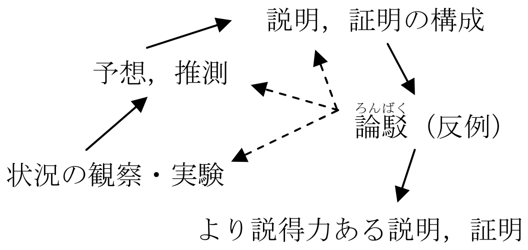


図 1 推測と論駁に基づく証明活動

図 1 は，証明活動を推測と論駁を取り入れた活動として表現しています [*2]。例えば，小グループ内で，互いに作った証明を見せ合い，誤りを正したり，証明を比べたりして証明を評価する活動を取り入れれば，証明を改善するよい機会となります。

以下では，証明することの指導を実現する幾つかのポイントを述べたいと思います。

2．証明と図との相互作用

証明の対象は「すべて」に関わる全称命題が中心です。図形の証明には，証明と図が登場する訳ですが，これらは対応しますので，どちらも一般性を有します。つまり，証明は任意の対象や関係を説明する文章であり，図の要素や要素間の関係も一般を表します。ところが図は一つしか書かれないことが多く，証明と図の一般性を理解する機会が乏しいように思います。

一つには，問題の条件を満たす図をいくつか書いてみることは重要だと思います。

どんなに歪めて書いたところで，結論になる関係は成り立ちます。ここに「なぜ」の問いが生まれてほしい。そもそも証明とはそのような「なぜ」を探究するものだからです。

もう一つは，証明を書いた後に，その一般性を明らかにする活動も重要だと思います。証明の文章は，問題の条件を満たす図であればいかなる図であっても成り立っています。このことを確認することが，証明の一般性を認識するよい機会になります。

証明の文章，証明に使われる図ともに，一般性という視点で眺めてみて，その独特な性格を捉えていく活動が，証明の意味を理解する上で重要だと思います。

3．仮定と結論の意味を作図を通して学ぶ

ただし，図を多く取り入れるだけではあまり効果がありません。「結果の図」を多く見たところで，仮定や結論の意味は生徒には伝わらないからです。

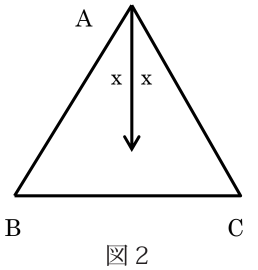


図 2

例えば，二等辺三角形の底角が等しいことの証明では，△ ABC において二辺 AB と AC が等しいという条件の下，∠ A の二等分線を描きます。これを作図レベルで考えれば，前者は AB と AC「だけ」を等しくすること，後者は頂点 A から BC へ垂線を下ろすのでも，BC の中点と A を結ぶのでもなく，まさに角を二等分します。ここでは作図の過程を意識に上らせることが重要だと思います。作図したこと「だけ」を仮定し，意図して書いたはずのない辺の長さや角の大きさの相等性までもが決定されているかどうかを調べている，という意識が，仮定と結論の意味へと転換されるのだと思います [*3]。

4．証明の構想と図形を見いだすこと

中学数学で扱われる図形は複合図形ですが，算数には実はそれほど複合図形は出てきません。面積の学習で図形を切ったり線を入れたりして扱いますが，証明活動で必要とされるような，目的意識をもって複合図形の中から，ターゲットとなる図形を選び取る力まで育成されているようには思えません。

中学 2 年の図形の証明は，合同条件を当てはめれば，合同の性質によって結論が成り立つものが多く，この場合，論理が複雑であるというより，むしろ図を選び出す方に難しさがあるように思います。図を選ぶ力は，証明の構想と大きく関わっていますので，意識して指導していきたいことです。

5．証明を読むこと

証明を読むこと，吟味することは，証明する能力の向上につながります。このとき，図形の選び方が複数ある問題を通して，証明を書き，読む力を同時に培うのがよいのではないかと思います。全国学力学習状況調査 H26 では，次の問題（図 3）が出題されています。

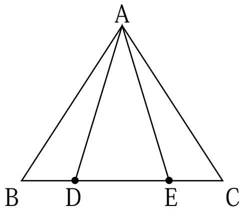


図３

AB=ACの二等辺三角形ABCの辺BC上にBD=CEとなる点D，点Eをそれぞれとります。AD=AEとなることを証明しなさい。

この問題では△ABDと△ACEの他に，△ABEと△ACDの選び方もあります。一つの選び方で証明した後，その証明を「読みながら」，別の選び方を証明し，さらには両方の証明を比較対照することは，有効な実践だと思います[*4]。別の問題にすぐに移るのではなく，「シツエーションを汲み尽くす」[*5]ことの重要性とも言えます。

６．証明のための素地指導

本稿で述べてきたことは，ある意味では証明の素地指導を示唆したものでもあります。小学校段階から，特に中学１年で，証明への接続を考えて，作図指導の充実，複合図形の認識を高めることが必要だと思います。図形の移動の学習で「麻の葉模様の陣取りゲーム」を取り入れることなどは有用だと思います。目的意識をもって対応する図形を選び取る力が育成されます[*6]。

その他の素地指導として，図形「間」の関係性と定義の学習に言及したいと思います。

図形「間」の関係の探究とは，例えば算数の面積の学習で，ひし形の面積公式（対角線の長さ×対角線の長さ）を導いた後に，ひし形を越えて，この公式はどんな図形に通用するかと問うことができます。たこ形や二等辺三角形，凹四角形の関係が一つの面積公式で結ばれます。台形の公式では，もし上底の長さが０になったらどうだろう，もし上底と下底の長さが等しくなったらどうかと問えば，図形間の関係を考える機会になります。

最後に，定義についてですが，小学生は，平行四辺形を「向かい合う辺が平行で，向かい合う辺の長さが等しくて，向かい合う角の大きさが等しくて…」のように詳しく説明して，図形を特徴付ける傾向があります。証明では，向かい合う辺が互いに平行な四角形という条件「だけ」が平行四辺形の定義であり，その他の性質は証明の対象です。ここに大きな乖離（かいり）が生じています。定義が働かなければ証明は理解できません。定義の認識を，小中学校の両方でどう高めていくかは大きな課題だと思っています。

引用・参考文献

*1 小関熙純『図形の論証指導』(1987)，明治図書
*2 岡崎正和『中学校「図形」領域の学習指導．小山正孝編，教師教育講座第14巻　中等数学教育．第５章』(2014)，153-180，協同出版
*3 岡崎正和，岩崎秀樹『算数から数学への移行教材としての作図－経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践－．数学教育学論究，80』(2003)，3-27
*4 森　裕司『書かれた証明を読み取り，新たな性質を見いだすことができない．数学教育９月号』(2014)，78-81，明治図書
*5 平林一榮『数学教育の活動主義的展開』(1987)，東洋館出版社
*6 岡崎正和，髙本誠二郎『図形の移動を通して培われる図形認識 －論証への移行を目指したデザイン実験－，91 (7)』(2009)，2-11，日本数学教育学会誌

関数の特徴の理解に焦点を当てて

福岡教育大学　准教授　岩田　耕司

関数指導の工夫を考えるにあたって，前編では，関数の意義を踏まえた指導のあり方について考えました。どのような目的で指導を考えるかによって，指導の工夫やその価値も変わってくると考えたからです。

本稿では，それらの前提のもとに，比例や反比例，一次関数など，個々の関数の特徴の理解に焦点を当てて，関数指導の工夫を考えていきたいと思います。

1．いろいろな関数と比較する

例えば，比例の指導で比例を扱うのは当然のことですが，その指導の中で，比例する２量の関係しか扱ってはいけないというわけでは決してないと思います。比例の指導では，あくまで比例の特徴の理解に焦点が当てられるというだけであって，その目的を達成するためには他の関数を扱った方がむしろよい場面もあるでしょう。一次関数や２乗に比例する関数の指導場面においてもまた然（しか）りです。

例えば，「日本」という国の特徴を考えてみましょう。海外に行かれたことのある方はお分かりになると思いますが，日本という国の特徴は，日本にいる限りにおいてはあまり意識されないことの方が多いように思います。一方，海外に出てみると，改めて日本はこういう国だったのだなあと再認識させられることがあります。例えば，水道水が普通に飲めること，治安がよいこと，建物が木でつくられていること等々，日本に住んでいる限りにおいては当たり前のように感じていることも，外国と比べればとても特別なことのように感じられるでしょう。

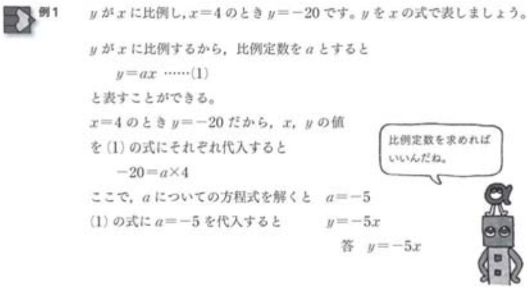
関数の指導においても同様のことが言えると思います。比例の特徴を際立たせるためには，比例だけを観察するのではなく，いろいろな関数の変化や対応の様子を観察し，それらの特徴を比べることが大切です。小学生の中には，「増えれば増える」という関係を比例と捉えている子どもも少なくありません。比例とそうでないものとの比較を通して，比例に固有な特徴を際立たせる指導の工夫が必要と言えるでしょう。

2．表での考察を大切にする

一般に，関数関係は目で見ることはできません。そこで，関数関係をとらえるために表，式，グラフなどの表現が用いられます。これら数学的な表現を用いることで，現実の世界における数量の関係を数学の世界で考察することができるようになるわけです[*1]。

中学校数学科では，小学校での学習のもとに，特に，式の形に着目して関数を調べることが求められますが，その際も，決して形式化を急ぎ過ぎることのないように，表，式，グラフを相互に関連付けて関数の

特徴の理解を深めることが大切です。特に，子どもにとって小学校段階から慣れ親しんできている表での考察を大切にすることが，関数の特徴の理解や問題解決の大きな助けとなることでしょう。例えば，次のような問題を見てみたいと思います（『中学数学 1 年』p.118）。


例1　y が x に比例し，$x=4$ のとき $y=-20$ です。y を x の式で表しましょう。

y が x に比例するから，比例定数を a とすると

$y=ax$ ……(1)

と表すことができる。

$x=4$ のとき $y=-20$ だから，x，y の値を (1) の式にそれぞれ代入すると

$-20=a\times 4$

ここで，a についての方程式を解くと　$a=-5$

(1) の式に $a=-5$ を代入すると　$y=-5x$

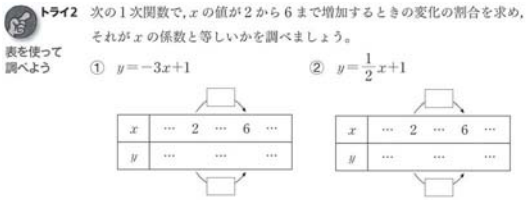
答　$y=-5x$

この問題のように，対応する一組の値から比例の式を求める問題は，子どもにとって，とてもハードルの高い問題です。そもそも問題の意味すらよく分からないという子どもも多いことでしょう。この問題については，例えば，問題の条件である対応する値の組を，右の表のような形で提示するだけでも問題の印象は大きく変わります。

x	…	4	…
y	…	−20	…

また，比例の表の特徴（ここでは，一方の定数倍が他方になること）が印象に残っている子どもであれば，表から比例定数を求め，x と y の関係を式に表すことも可能でしょう。

中学校第 2 学年の「変化の割合」の学習においても同様のことが言えると思います。例えば，一次関数の式のみを提示し，x の値が 2 から 6 まで増加するときの変化の割合を求めなさいという問題を提示したとしても，ほとんどの子どもがまず何をしてよいか分からないでしょう。このような問題に対しても，次の図のように，まずは表の形に直して変化の様子を調べることが有効です（『中学数学 2 年』p.61）。


トライ2　次の 1 次関数で，x の値が 2 から 6 まで増加するときの変化の割合を求め，それが x の係数と等しいかを調べましょう。

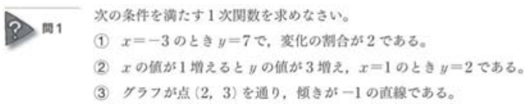
表を使って調べよう

① $y=-3x+1$　② $y=\frac{1}{2}x+1$

x	…	2	…	6	…
y	…		…		…

x	…	2	…	6	…
y	…		…		…

また，与えられた条件から一次関数の式を求めるような問題においても，特に式に抵抗を感じているような子どもに対しては，問題の条件を「表」に表し，表から変化の割合や切片の値を読み取るような指導の仕方があってもよいと思います（『中学数学 2 年』p.68）。


問1　次の条件を満たす 1 次関数を求めなさい。

① $x=-3$ のとき $y=7$ で，変化の割合が 2 である。

② x の値が 1 増えると y の値が 3 増え，$x=1$ のとき $y=2$ である。

③ グラフが点 (2, 3) を通り，傾きが -1 の直線である。

x	−3
y	7

⇨

	+1	+1	+1		
x	−3	−2	−1	0	…
y	7				
	+2				

変化の割合が 2

このように，表は，関数関係の「変化」と「対応」の両方の様子を読み取ることのできる便利な道具です。繰り返しになりますが，一般に，関数関係は目で見ることはできません。場面に応じて，時には式で，時にはグラフで，どのように表現すれば関係を捉えやすくなるかが工夫のポイントとなるでしょう。

引用・参考文献
*1 文部科学省『中学校学習指導要領解説 数学編』(2008)，p.28，教育出版

「倍」の指導ポイント

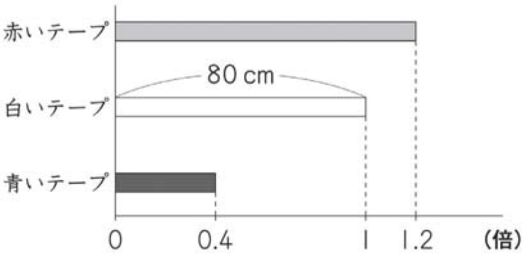
「操作としての倍」から「対象としての倍」へ

愛知教育大学　教授　佐々木　徹郎

平成26年度全国学力・学習状況調査小学校算数の結果は，Aの平均正答率78%，B 58%で，全体によい成績をあげています。A，Bともに，問題によっては95%ほどの正答率があり，小学校の先生方のご指導の成果です。

しかし，Aでも50%程度の問題もあります。以下は問題②で割合の理解をみるものです。

「下の図のように，白いテープの長さをもとにして，赤いテープと青いテープの長さを表しました。



(1)　赤いテープの長さを求める式を，
　下の1から4までの中から1つ選んで，
　その番号を書きましょう。

　1　80＋0.2
　2　80－0.2
　3　80×1.2
　4　80÷1.2

(2)　青いテープの長さを求める式を，
　下の1から4までの中から1つ選んで，
　その番号を書きましょう。

　1　80＋0.6
　2　80－0.6
　3　80×0.4
　4　80÷0.4　」

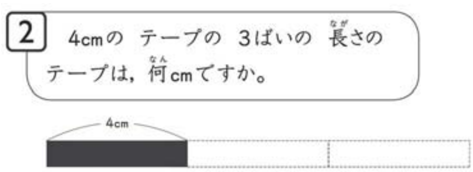
(1)の正答は3であり，正答率は72%です。誤りとして多いのは1であり，17%です。(2)の正答は3であり，正答率は54%です。誤答は4が28%，2が16%です。

(1)はよくできているものの，「1　80＋0.2」を選んだ児童が少なくないことに留意しなければなりません。この答えは，倍である1.2と1の差である0.2を80㎝に足したものです。これは，倍の意味が十分理解されていないことを示しています。

(2)の誤答のうち，「4　80÷0.4」は，青いテープが白いテープよりも短いので，わったのでしょう。「2　80－0.6」は，(1)の1と同じように，差を求めてひいたのでしょう。これも，倍の理解に問題があることを示しています。

では，倍とは何でしょうか。「長さ」のような量とは，どこが違うのでしょうか。

倍の指導は，2学年から始まります（平成27年度版『小学算数2年下』p.10）。

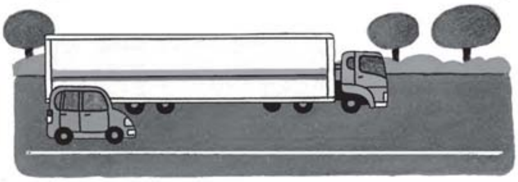


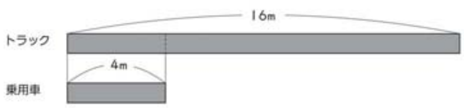
「２つ分のことを２ばい，３つ分のことを３ばいといいます」というように，「いくつ分が倍です」としています。つまり，倍というのは「長さへの働きかけ」のように,量への「操作」として指導しています。

ここで重要な指導のポイントは，教具や図に対する十分な操作活動をして,児童が,実際的に倍を理解することです。また,「いくつ分」といっても，倍では連続量への操作になっていることも注意が必要です。ゴムなどの教具を使って，連続的に伸ばす活動が考えられます。

次に倍を学ぶのは，わり算に関連する，３学年です。次のような問題です（平成27年度版『小学算数３年上』p.32)。

1　トラックの長さは16mで，乗用車の長さは4mです。
トラックの長さは，乗用車の長さの何倍ですか。





これらの違いはどこでしょうか。ここでは，量の比較として倍を考えていることです。長さの比較は，日常生活では普通，差で考えます。問題②の(1)で「1　80＋0.2」や,(2)で「2　80－0.6」を選んだ児童は，そのように差で考えたのです。

比較するとき，差ではなく，商の方が便利なのは，どんなときでしょう。多数のものを比較するときや，もとにする量やくらべる量が変わるときです。

しかし，商で比較できるためには，２学年の「操作としての倍」が内面化していなければなりません。つまり，児童が頭の中で倍の操作をイメージできなければならないのです。

ここが,倍指導の２つめのポイントです。３学年の問題では，児童が念頭の操作で,「長さの倍」をイメージできるように指導しなければなりません。それから，わり算で計算します。

４学年では，４つのテープの長さを，倍で比べる問題になります（平成27年度版『小学算数４年下』p.103)。

1　右の表は，ななみさんが持っているテープの長さを表しています。
赤のテープの長さをもとにすると，ほかのテープの長さは何倍になりますか。

テープの色	長さ（m）
赤	2
青	5
黄	4
緑	1

もちろんここでも，テープ図を使って，児童が念頭で倍の操作をイメージできることを確認しなければなりません。さらにここから，操作としての倍から，対象としての倍へと発展していきます。

つまり,「比べる量÷もとにする量＝倍」という式の形に着目します。これが，３つ目の指導ポイントです。そして，５学年の「倍を表す小数」を経て,「割合」の学習へとつながっています。

問題Ｂで，プールの水の量が何倍かを問う問題②の正答率は83％と，よくできています。倍の計算はよくできているのです。３つの指導ポイントをふまえて，割合の計算から意味理解へとさらに前進しましょう。

平成27年度版 教科書

小学算数 新版

1年	算数 140		
2年上	算数 240	2年下	算数 241
3年上	算数 340	3年下	算数 341
4年上	算数 440	4年下	算数 441
5年上	算数 540	5年下	算数 541
6年上	算数 640	6年下	算数 641

「小学算数デジタル教科書」1〜6年
平成27年4月発売予定！

平成24〜27年度版 教科書

中学数学

1	数学 727
2	数学 827
3	数学 927

中学数学 1〜3
「教師用指導書
指導者用デジタル教科書」
各学年 価格**30,240**円
（本体28,000円+税8%）

教科書・デジタル教科書の詳細は、
日文Webサイトで随時お知らせします！

日文 検索

RooT（ルート） No.15

日文教育資料［算数・中学校数学］
平成26年（2014年）10月31日発行
編集・発行人 佐々木秀樹
発行所 日本文教出版株式会社
〒558-0041 大阪市住吉区南住吉4-7-5
TEL：06-6692-1261

CD33253

日本文教出版 株式会社
http://www.nichibun-g.co.jp/

大阪本社	〒558-0041 大阪市住吉区南住吉4-7-5	TEL:06-6692-1261 FAX:06-6606-5171
東京本社	〒165-0026 東京都中野区新井1-2-16	TEL:03-3389-4611 FAX:03-3389-4618
九州支社	〒810-0022 福岡市中央区薬院3-11-14	TEL:092-531-7696 FAX:092-521-3938
東海支社	〒461-0004 名古屋市東区葵1-13-18-7F•B	TEL:052-979-7260 FAX:052-979-7261
北海道出張所	〒001-0909 札幌市北区新琴似9-12-1-1	TEL:011-764-1201 FAX:011-764-0690