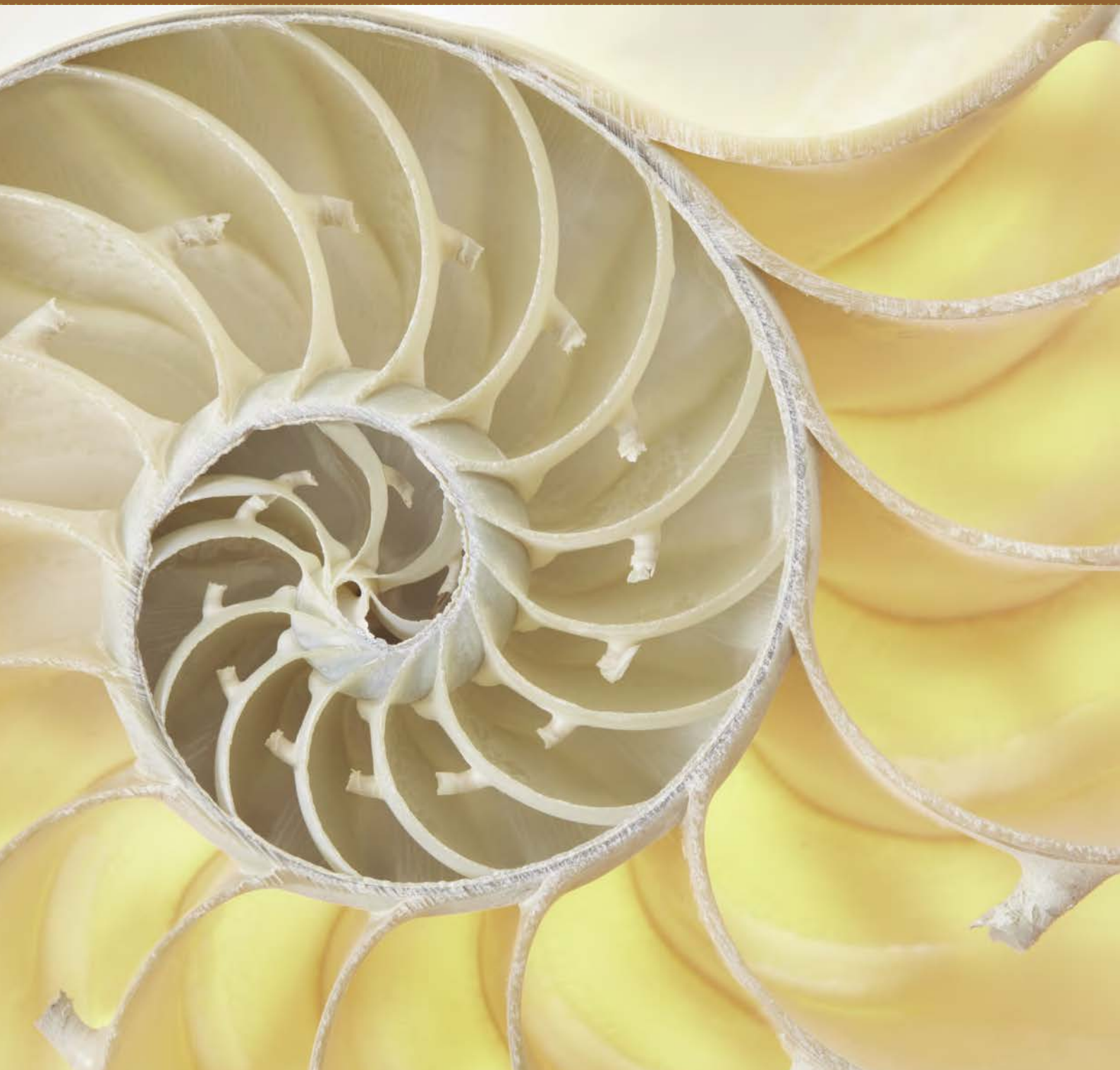


# √ ROOT

2016

No.19



本資料は、「教科書発行者行動規範」に則り、配布を許可されているものです。

日文の実践事例、教科情報

詳しくはWebへ!

日文

検索

未来をになう子どもたちへ

日本文教出版

## CONTENTS

1

### マテマ! R

問題編 モリナガ・ヨウ



2

### Hello, Mathematics!

東京大学先端科学技術研究センター教授

### 西成 活裕

渋滞を数学で解決?!  
世の中の問題は数学で解決できる!



6

### 読み解く数学偉人伝 エラトステネス

桐蔭横浜大学准教授 城田 直彦



8

### 授業改善のヒント

小学校編

### 日常の事象に対して 目的に適した概算をする活動

愛知教育大学講師 高井 吾朗

中学校編

### 予想した事柄を数学的な表現を 用いて説明する活動

兵庫教育大学講師 川内 充延

12

### マテマ! R

解説編 天理大学教授 上田 喜彦

解答編 モリナガ・ヨウ



算数・数学情報誌【ROOT】が  
新しくなりました

オウムガイの切断面は対数螺旋(らせん)を描いています。  
ROOT No.19 の表紙では、自然界に  
潜む数学としてオウムガイを取り上げ  
ました。

取材協力 東京大学先端科学技術研究センター西成研究室 (P.2 ~ 5)

メディアアイランド (P.2 ~ 5)

撮影 坂本 晶子 (P.2 ~ 5)

イラスト 藤井 美智子 (P.2 ~ 7)

デザイン 株式会社 京田クリエーション



# マテマ!R

問題編

え/モリナダヨウ

マテマランドはどこかにある数学のテーマパーク。  
数学のパズルやふしぎを楽しむことができるそうです。

...というわけで、  
みなさんの  
ナビゲーターになった  
ワリズミだ。  
よろしく。

あいかわらず、  
近いんだけど  
....

ま、久しぶり  
なんて、  
簡単なパズルを  
やろうか。

はやてさん ゆうかさん

②では、AとBの位の数字が  
同じにならないように。

① 位の数字がすべてちがう5けたの  
数Aを考える。

② Aの位の数字を入れかえて、数B  
をつくる。

③ AとBの差Cを求める。

④ Cの一の位以外の数字を合計する。

すべて入れかえた  
新しい数。

④の合計から、  
Cの一の位をあててみせよう!

それでAとBの差を求めるんだね。

合計

引いて出た差

これを  
あてる。

① 58271  
② 72518  
③  $72518 - 58271 = 14247$   
④  $1 + 4 + 2 + 4 = 11$

ぼくは  
11  
だよ。

① 90478  
② 47089  
③  $90478 - 47089 = 43389$   
④  $4 + 3 + 3 + 8 = 18$

わたしは  
18  
だね。

ピキニ

Cの一の位は、  
はやてさんが  
7、  
ゆうかさんが  
9  
だろう?

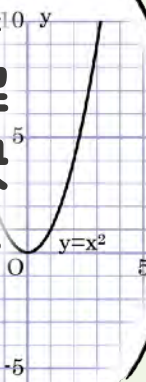
ええー!! あたってる?!

どうしてあてられたのでしょうか?  
続きは解答編へ...



# 世の中の問題は 数学で解決できる！

渋滞を数学で解決?!



東京大学先端科学技術研究センター教授

にし なり かつ ひろ  
**西成 活裕**

「数学なんて何の役に立つの？」

そんな質問に「渋滞を解消できる」という  
答えが返ってきたら、どう思いますか？

東京大学先端科学技術研究センター教授の  
西成活裕先生は数学をもとにした「渋滞学」など、  
ユニークな研究を数多く発表しています。  
数学を社会に生かすコツをうかがってみました。

## 北野武監督は 因数分解で映画を撮っている!?

——「数学はニガテ！」 そんな場合、どうすれば  
興味を持てるんですか？

興味があるものと結びつけるといいですね。

中学校で講演するとき、生徒たちに「ゲームが  
嫌いな人はいますか」と尋ねます。すると、数学  
は嫌いだけどゲームは好きだよなと言いはじ  
めます。そこで「ゲームにも数学が使  
われているんだよ」と、ゲームを  
もとに数学的要素を交えて話す  
のです。

何でもかまわないので  
す。まったく何にも興味  
がない、なんてことは  
ないでしょう？ 一つ  
でも好きなもの、興  
味があるものを探し  
あてて、その先に教  
科を結びつけてみてく  
ださい。好きなことが  
どんな勉強とつながっ  
ているかを調べたり、先  
生に聞いてみたりすると、  
好きなことにも、勉強にも、もっ  
と興味が深まるでしょう。

「映画の撮影に因数分解を応用してい  
る」なんて聞くと驚きませんか。北野武監督

から聞いた話なのですが、いろんなシーンをそれ  
ぞれ撮るには時間がかかります。そこで、共通す  
るカットを洗いだす。たとえば、ドアを開けて入っ  
てくるという共通のカットがあれば、そこを先に  
全部撮って、残りはそれをぬいて撮る。これは因  
数分解と同じ仕組みですよ。撮影時間はぐっと  
短縮されて、効率化につながります。

「たけしさんが因数分解の考え方で映画を撮ってい  
るんだよ」と聞くと、映画のこと、因数分解のこと、  
どちらの興味の持ち方もまったく変わってくるで  
しょう。

## すべての物事が結びつくように 日ごろから頭を鍛えてみよう！

——思いがけないところにも数学的な考え方が生  
きるということですか？

頭の使い方次第で数学的な考え方はどんなこと  
にでも生かれます。

実はわたしも問題を考えるとき、最初のアイデ  
アはだいたい中学レベルの数学を使って考えます。  
すべて本質をとらえて単純化、数理化することが  
大切です。中学数学で説明できないのなら、まだ  
単純化できていないということです。例えば、あ  
る会社で長年困っていた問題を、中学校でも学習  
する放物線の考え方を活用して解決したのですよ。  
そう聞くと、「数学の考え方って何の役に……」と  
は思えなくなりませんか？

——どうやって数学と物事を結びつけるので  
すか？ コツがあるんですか？

小学生のときに遊びの延長で始めた「言葉つな  
ぎゲーム」は、数学だけでなく物事全般を結びつ  
けるためのおすすめの発想方法で、いまでも続けて  
います。

さまざまな言葉を書いた紙が入った箱を枕元に



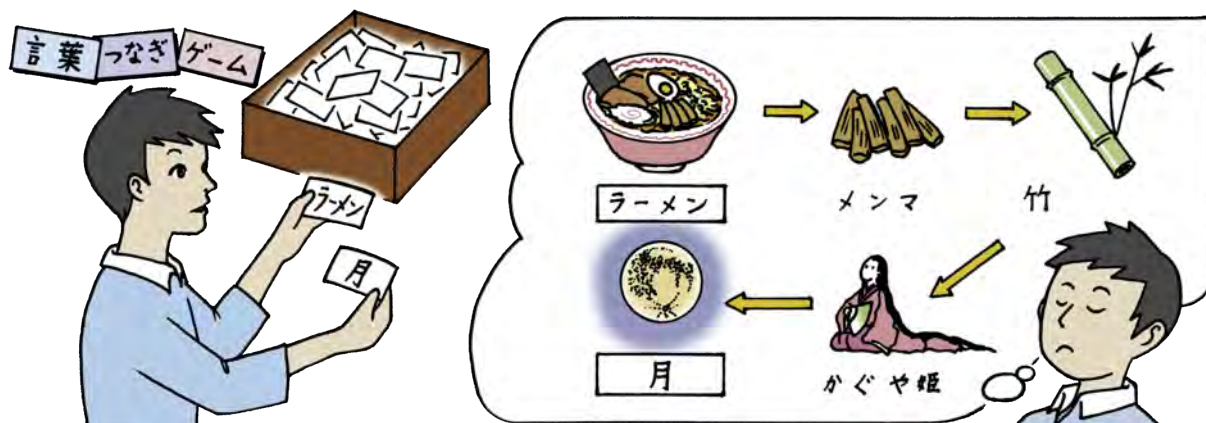
置き、朝起きたときに、そこから紙を2枚取り出  
します。この2枚の言葉をつなぐ作文を、いくつ  
かの言葉を加えて考えるのです。

例えば、「ラーメン」と「月」なら、ラーメンに  
はメンマが入っている、メンマは竹からできてい  
る、竹といえはかぐや姫、かぐや姫は最後に月に  
帰る、といった具合ですね。毎日続けていると、  
世の中、関係のないものはなくなります。わたし  
の場合は、解決したい社会の問題があれば、この  
方法で「数学」をつなげていくのです。

こんな発想で考えていくと、「自分とは関係ない」  
と思えることはなくなりますね。



## 発想で頭を鍛える！ 世界中のものを結びつけてみよう



——なんでも自分と関係ある？ でも、それだと  
どうやって将来を考えたらいいんですか？

少し難しいことですが、一步引いて物事の全体  
を見通す姿勢が大事です。

いま、嫌いで勉強したくない科目も15年後、  
20年後には役に立つかもしれない。大きな時間軸  
で考えるとムダなものなどありません。小中学校  
時代は、スポンジのように何でも吸収できて無限  
の可能性があるので、「やりたくないことはや  
らない」と最初から知識の幅をせばめてしまうの  
はもったいない。全体を見通して、いま何をなす  
べきか考える力を子どものうちから身につけてい  
ると、将来大きく差が出ると思います。

## 「いま」と将来の「目標」を ステップでつないで考える

——具体的にどうやって考えればいいんですか？

「言葉つなぎゲーム」がここでも有効です。「将  
来になりたいもの」が「プロ野球選手」だった場合、  
一方にそれを置いて、もう一方に「いまの自分」  
を置く。いくつかのステップを加えて、「いまの自  
分」から「になりたい自分」にたどり着く過程を、  
小説のようにシナリオを作って考えるのです。

つねに、「いま」と遠いところにある「目的・目  
標」を、ステップでつなげて考えていく。実は研  
究でもそうなんです。どんなことでも「現実」と  
結びついた、社会の役に立つという「目標」「ビジョ  
ン」をもつことが大事なんです。

これからの将来を考えるとときも同じだと思います。

——いま先生が解決したい問題はなんですか？

「コミュニケーションの<sup>じゅうたい</sup>渋滞」ですね。

いまはインターネットで簡単にメッセージがや  
りとりできるようになりましたが、言葉の意味は  
伝わっても、感情などは深刻なのか、軽いのかと  
いう程度を伝えることができません。顔文字で補  
うのですが、限界があって誤解が生まれる。これ  
が「コミュニケーションの渋滞」です。

わたしの専門は「渋滞学」ですが、最近、社会  
のさまざまなところでコミュニケーションが渋滞  
し、それが原因で会社や組織の生産性が下がるな  
どの問題が発生しているように思います。

ネット上でのやりとりもその一例です。絵文字  
もありますが、文字だけでは微妙なニュアンスが  
伝わりません。ふざけているのか、本気なのか、  
わからない。でも、会って話せば「そんなことだっ  
たのか」と気づくこともよくありますよね。

いろんな世界を経験し、  
ときには失敗することで  
人間として大きく成長できるのです



## 言葉によらない コミュニケーション力をみがこう

——誤解されないためにはどうすればいいですか？

言葉によらないコミュニケーション力をフルに  
使うことです。簡単に言うと、仕草や目線、<sup>ふんい</sup>雰囲気などのメッセージを感じとる能力です。だれか  
が困っているときに、察して声をかけられるよう  
な人は、その能力が高い人といえます。

「何かおかしいのではないか」「いつもと様子が  
ちがう」と感じる感覚も言語によらない能力です。  
その違和感<sup>い わ かん</sup>の原因を調べて解決することも大切で  
す。ある工場のベテラン作業員は、音の微妙な変  
化から機械の不調を感じ取ったそうです。その人  
が止めなければ、工場全体で大きな損害が出てい  
ました。

こうしたコミュニケーション力は、先ほどの全





体を見通す力にもつながります。

サッカー界の往年の名選手、釜本邦茂<sup>かまもとくにしげ</sup>さんは「後ろに目がある」といわれていました。まるでフィールド全体を見渡<sup>わた</sup>しているように、後方の空きスペースにパスを出せたのです。自分のまわりにいる相手チームの選手の人数やメンツから、フィールドの状態を一瞬<sup>いつしゅん</sup>のうちに思い描<sup>えが</sup>くことができたのですね。空間的に全体を見通す力が、経験と勘で身についたのでしょう。

こうしたコミュニケーション力や全体を見通す力は、今後、世の中でますます重要になってくるでしょう。

——自分を<sup>みづか</sup>めて全体を見渡すようになるにはどうしたらいいんですか？

どれだけ外に出て、いろんな世界を経験し、人間関係にもまれてきたかにつぎだと思います。いまは情報化社会<sup>へいがい</sup>の弊害もあって、経験が不足しがちなことを心配しています。検索機能<sup>けんさく</sup>を使えば、すぐに知りたいことを調べられます。それで何でも知っている、経験した気になってしましますが、それは「生きた情報」とはまったくちがうものです。失敗<sup>おそ</sup>を恐れず、自分から行動し、経験しなければ「生きた情報」は得られません。

**失敗はムダではない！**

**10年、20年後の宝物だ**

——失敗はしないほうがいいのでは？

失敗しないと学べないこともあるでしょう。失敗は、いまはムダに思えるかもしれない。けれど、10年、20年たったら宝物になります。そういうことも含めて時間軸を設定すれば、ムダな経験などありません。

日本社会には、失敗した人にペナルティを課す風潮がありますが、「どんどん失敗して学んでこい」と認める風土があれば、もっと日本は変わるのではないのでしょうか。

——先生は今後数学でどんなことを解決していくんですか？

近著『誤解学』では、コミュニケーションの渋滞の原因や仕組み、解消方法などについて、数学を使って考察しています。わたしの場合、車の渋滞、物流、コミュニケーションなど、あらゆる分野について考えるとき、土台となるのが数学です。数学という強力な武器で、社会の難問を解決していきたいと願っています。

——ありがとうございました。



**西成 活裕**（にしなり かつひろ）

東京大学先端科学技術研究センター教授。専門は数理論理学、渋滞学。文部科学省「高等学校の数学・理科にわたる探究的科目の在り方に関する特別チーム」委員。『渋滞学』（新潮選書）で講談社科学出版賞などを受賞。『とんでもなく役に立つ数学』『とんでもなくおもしろい仕事に役立つ数学』（ともに角川ソフィア文庫）、『無駄学』『誤解学』（ともに新潮選書）など著書多数。

#### 著書紹介



とんでもなくおもしろい  
仕事に役立つ数学  
(角川ソフィア文庫)



とんでもなく  
役に立つ数学  
(角川ソフィア文庫)

# エラトステネス

素数を効率よく発見できるアルゴリズムを考案



● 桐蔭横浜大学准教授  
城田 直彦

## 自然数を顕微鏡で見ろ！

「12の約数っていくつあるかな？ 言ってごらん」

取り組みやすいからでしょうか、この発問に生徒たちは生き生きと答えてくれます。答えは、6個です。

「では、45の約数はいくつ？」

12に比べて数が大きくなったので、約数の個数が増えると予想する生徒が多いのですが、結果は6個、12の場合と同じです。そこで、私は言います。「こんなときは、『顕微鏡で見る』とよくわかるんだ！」

もうお分かりですね、私が「顕微鏡で見る」と称しているのは、「自然数をいくつかの自然数の積の形に分解すること」を意味しています。12と45を「これ以上分解できないところ」まで作業を進めると、それぞれ  $2^2 \times 3$ 、 $3^2 \times 5$  となり、ともに  $\bigcirc^2 \times \triangle$  の形になります。両者にはそういう共通点があったわけです。そして、今回の話題である「素数」は、「これ以上分解できない」という最終到達点として現れてきます。

## 漏れ落ちないように、ルールを決めて

では、ある自然数が素数であるかないかはどのように判断すればよいのでしょうか。

たいへん面倒なのですが、これはもう「試してみるしかない」という状況です。約数が1とその数自身だけの自然数が素数ですから、素数かどうかを判断するためには、約数を調べてみればよさそうです。

その際には「漏れ落ち」がないように、たとえば「小さい数から順に調べる」というルールを持っておくのがよいと思います。たとえば、35の場合……，

- ① 35は2では割り切れない
- ② 35は3では割り切れない
- ③ 35は4では割り切れない
- ④ 35は5で割り切れる！ → 素数ではない

これで作業は完了！ 35は素数ではありません。

この作業では、①～④まで似たようなチェックが続けられ、④で完了しています。このように、ある問題を解決するための方法や手順は、一般に「アルゴリズム」と呼ばれています。

## さらによいアルゴリズムを求めて

じつは、先の③のチェックは省略できます。

35が2で割り切れないことは、①でチェック済みです。2で割り切れない数は4でも割り切れないので、③のチェックは不要になります。したがって……，

- ① 35は2では割り切れない
- ② 35は3では割り切れない
- ③ 35は5で割り切れる！ → 素数ではない

手数が減りました！ 先ほどより効率のよいアルゴリズムになったわけです。

よく見ると、2,3,5……，素数が並んでいます。つまり、ある数が素数であるかどうかを判断するためには、その数よりも小さい素数で割り切れるかどうかを調べればよいわけです。素数のチェックに素数を使うなんてなんだか奇妙な感じですが、「既に分かっていることを利用すると、作業を効率化できる」というよい例です。





さて、この方法だと、たとえば47が素数かどうかを調べるためには、2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43についてチェックする必要があります。これはかなり大変な作業です。しかし、実際のところ、ある自然数  $x$  が素数であるかどうかを調べるためには、 $\sqrt{x}$  までの素数をチェックするだけで済みます。 $\sqrt{47} \approx 6.86$  ですから、2,3,5までのチェックで十分です。47の場合、2,3,5のどれでも割り切れませんから、素数だと判断できます。

## ふるい エラトステネスの篩

「ふるい」という道具は、曲物杵の底に格子状の網を張ったもので、砂と石を選り分けたりするときに使います。中学生だって小さい頃砂場で遊んだ経験があると思うのですが、名称まではあまり知ら

ないようです。

この篩を自然数に使います。たくさんの自然数をがばっと篩に入れて振ると、素数だけが選り分けられる——そんなイメージのアルゴリズムが「エラトステネスの篩」です。とてもシンプルな作業ですが、原理としては現在でもよく使われています（もちろんコンピュータの力を借りることになります）。

この篩を考案したとされるエラトステネス（BC275～194）は、今からおよそ2200年前のエジプトで活躍したギリシャ人の学者です。同時期に活躍したアルキメデス（BC287～212）は、彼の友人です。

エラトステネスは数学だけでなく、天文学、地理学においても大きな業績を残しています。特に「地球の大きさを測った人物」として有名です。

ご案内 「星田直彦」名義での城田先生の近著『図解 よくわかる 測り方の事典』（角川新書）もぜひご覧ください。



# 日常の事象に対して 目的に適した 概算をする活動



●愛知教育大学講師  
高井 吾朗

## 1: 日常の事象への活用についての課題

平成28年8月1日の文科省 教育課程部会 教育課程企画特別部会における配布資料から、学習指導要領改定の方が見えてきました。具体的には、「社会に開かれた教育課程」の実現のために、アクティブ・ラーニングの視点からの学習過程の改善が求められています。

算数科では、現行の学習指導要領においても、算数的活動を通した学習の中で、日常の事象について算数を使って考えたり、表現したりすることを目指してきました。つまり、主体的・対話的で深い学びを通して、現実へと活用することをこれまでも行ってきたということです。

では、そんな学びの成果は本当に出ているのでしょうか。平成27年度の全国学力・学習状況調査の算数B[4]では、キャップ集めについて概数・概算を用いて目標に達しているかどうかを判断する問題が出題されました（次頁上、左下図）。そして、(2)においては、全て切り上げで考えることで、目標の10000個に多く見積もっても達していないことを示す選択問題が出題されており、正答率は62.2%でした。一方、(3)において、目標達成のためにあと何個必要かを示す考え方が提示され、その考え方の根拠を説明する問題が出題されましたが、その正答率は22.5%でした。この結果から、「日常生活の事象の解決に、概数や概算を活用して、目的に応じて合理的かつ能率的に判断することができるようにする」ことが学習指導の課題として挙げられています。

## 2: 概数・概算の活用とそのよさの探究

このような状況に対して、日本文教出版の教科書『小学算数4年上』P.58（次頁右下図）では、日常生活において概数がどのように使われているの

かを紹介しています。ここで、元の数に対して何けたで四捨五入するのが適切かを考える際に、「相手にどのような情報を伝えたいか」、「相手に誤解を与えないためにはどうすればいいか」などの目的を入れることで、学習者は、日常生活で概数を使う際の体験活動を取り入れることができます。

また、目的に応じて合理的かつ能率的に判断することができるような活動として、「四捨五入」、「切り上げ」、「切り捨て」という概算を目的に応じて使い分ける活動が挙げられます。例えば、買い物に行く際に、1000円しか持っていないとすると、どの概算を使うべきかという課題を与えることで、「多く見積もること」の有用性を実感させるということです。逆に「少なく見積もること」の例なども一緒に考えさせることで、機械的に四捨五入するのではなく、目的に応じて様々な概算をすることのよさを感じ得ることが期待されます。

## 3: 日常の事象への活用に向けて

日常の事象への活用は、単に日常で使われていることを示すことではありません。日常の何を明らかにし、何を表現するのかという目的があるからこそ、算数を活用する意味が出てきます。今回は概算を例に出しましたが、ともに変わる2つのものの見方である関数の考え方、資料の整理におけるグラフの扱い方など、日常の事象に活用しやすいだけでなく、学習者に目的を提示しやすいものは、たくさんあります。このような例を参考にいただき、多くの教室で算数の知識・技能が日常に活用されることを期待しています。

※本資料P.9, 10に掲載した調査問題は、国立教育政策研究所のWebサイトより引用しました。また、本資料P.8～11を作成するにあたり、同サイトに掲載された全国学力・学習状況調査「解説資料」及び「報告書」を参考にしました。



4

児童会活動で、ペットボトルのキャップを集めています。4月から7月までの間に集める目標は、10000個でした。7月までの4か月間に集めた個数は、下の表のとおりです。

| 7月までの4か月間に集めた個数 |      |      |      |      |
|-----------------|------|------|------|------|
| 月               | 4月   | 5月   | 6月   | 7月   |
| 個数(個)           | 1891 | 1982 | 2903 | 2473 |

次の会話を読んで、あとの問いに答えましょう。

まなぶ

集めた個数の合計は、目標に達しているかな。

はるか

目標に達しているかどうかなら、およその数にして計算すればわかります。

およその数にする方法は、次の3通りがあります。

- ・ 四捨五入する
- ・ 切り捨てる
- ・ 切り上げる

ゆうと

切り捨てて、千の位までのおよその数にして計算すると、次のようになります。

実際の数 1891 1982 2903 2473  
 およその数の計算  $1000 + 1000 + 2000 + 2000 = 6000$   
 実際の数より小さい数にして和が6000だから、集めた個数の合計が6000個以上であることはわかります。

正答率 52.8%  
無解答率 2.4%

(1) 四捨五入して計算します。次の①の式に入る数と、②に入る数を書きましょう。

四捨五入して、千の位までのおよその数にして計算すると、次のようになります。

実際の数 1891 1982 2903 2473  
 およその数の計算  $\square + \square + \square + \square = \textcircled{2}$   
 ①

実際の数に近い数にして和が②だから、集めた個数の合計が約②個であることはわかります。

(2) 切り上げて計算します。次の③に入るふさわしい文を、下の1から4までの中から1つ選んで、その番号を書きましょう。

切り上げて、千の位までのおよその数にして計算すると、次のようになります。

実際の数 1891 1982 2903 2473  
 およその数の計算  $2000 + 2000 + 3000 + 3000 = 10000$   
 ③

ことがわかります。

- 1 実際の数より大きい数にして和が10000だから、目標に達している
- 2 実際の数より大きい数にして和が10000だから、目標に達していない
- 3 実際の数より小さい数にして和が10000だから、目標に達している
- 4 実際の数より小さい数にして和が10000だから、目標に達していない

正答率 62.2%  
無解答率 3.9%

(3) 9月から12月までの間に集める目標も、10000個です。11月までの3か月間に集めた個数は、下の表のとおりです。

| 11月までの3か月間に集めた個数 |      |      |      |
|------------------|------|------|------|
| 月                | 9月   | 10月  | 11月  |
| 個数(個)            | 3009 | 2514 | 2120 |

はるかさんは、目標に達するには、12月におよそ何個のキャップを集めればよいかを、次のように考えました。

はるかさんの考え

3か月間に集めた個数の合計を、次のようにして計算します。  
 実際の数 3009 2514 2120  
 およその数の計算  $3000 + 2000 + 2000 = 7000$   
 目標の10000個に達するには、12月に3000個集めればよいはずだ。

はるかさんの「およその数の計算」で、12月に3000個集めればよいことがわかります。実際の数で計算しなくても、12月に3000個集めればよいことがわかるのはなぜですか。

そのわけを、言葉と数を使って書きましょう。

正答率 22.5%  
無解答率 15.2%

▲平成27年度 全国学力・学習状況調査 小学校算数B問題 4

いちに算活調べよう

2 身のまわりで使われているがい数を調べよう。

① どんどころでがい数が使われているか、さがしてみよう。

岩倉具視あて手紙 続々

約9000年前

9000年前の井戸発見

シリア浄水用、最古の疫病対策か

約1700年前

1. 津波発生時の「緊急避難場所」の設置  
 時期：平成25年2月から順次(平成25年4月 設置完了予定)  
 場所：名古屋線、山田線、鳥羽線、志摩線、鈴鹿線、内閣府の津波浸  
 透高電柱(約1,100カ所)

約100カ所

2. 「避難はしこ」の搭載  
 時期：平成24年11月から順次  
 (平成26年3月 搭載完了予定)  
 対象：特急列車および一般列車  
 台数：1編成に1～2台 計約500台

約500台

A・B・C  
 射距離 3～6m(+20℃)  
 射撃時間 約15秒(+20℃)  
 使用温度範囲 -31℃～+40℃  
 適合薬剤 約15秒  
 適合薬剤 約15秒

がい数になると  
 便利なことってどんな  
 ことだったかな。

はるかさん

② 見つけたがい数をしょうかいしよう。

58

▲平成27年度版「小学算数4年上」P.58(日本文教出版)

# 予想した事柄を 数学的な表現を用いて 説明する活動



●兵庫教育大学講師  
川内 充延

## 1. 全国学力・学習状況調査の結果から 見えてきた生徒の課題

中学校数学の第2学年以上の学習指導では、数や図形に関する性質を考察する場面において、生徒自らが事柄を予想し、それを明確に表現することが求められています。予想した事柄は、前提に当たる部分（主部：～）と結論に当たる部分（述部：……）によって、「～は、……になる（である）。」という命題の形で述べることになります。

平成25年度全国学力・学習状況調査の数学B[2] (2) では、2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和について、予想した事柄を表現する問題が出題されています（本頁右段）。正答率は39.3%，無解答率は34.0%で、「発展的に考え、予想した事柄を説明することに課題がある」と報告されました。平成20年度調査の数学B[2] (3) では類題が出題されています。正答率は49.2%，無解答率36.1%で、平成25年度調査と同様の課題が指摘されています。

## 2. 予想にはじまる数学的探究

このような状況を踏まえ、日本文教出版の教科書『中学数学2』では、「文字を使った説明」においてP.27（次頁左段）のように、予想する段階を

学習の流れとしては、まず、**Q 見つけよう**の例から帰納的、類推的に考えて予想を立てます。ここでは、多くの場合を試す時間を十分に取りたいものです。生徒自らが事柄を予想するには、生徒自らが2けたの自然数を決めて、それを試すという行為が不可欠です。この行為が事柄の成り立

[2] 大輝さんは、2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差がどんな数になるかを調べています。

調べたこと

|    |     |             |                       |
|----|-----|-------------|-----------------------|
| 41 | のとき | $41 - 14 =$ | $27 = 9 \times 3$     |
| 53 | のとき | $53 - 35 =$ | $18 = 9 \times 2$     |
| 28 | のとき | $28 - 82 =$ | $-54 = 9 \times (-6)$ |

上の調べたことで、2つの数の差が9と整数の積になっていることから、大輝さんは、次のことを予想しました。

予想

2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を  
入れかえた数の差は、9の倍数になる。

77のときは、  
 $77 - 77 = 0 = 9 \times 0$   
予想どおり、このときも  
9の倍数になっている。



中略

正答率 39.3%  
無解答率 34.0%

(2) 大輝さんは、2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和は、どんな数になるかを考えてみたいと思い、いくつかの場合を調べました。

|    |     |             |     |
|----|-----|-------------|-----|
| 21 | のとき | $21 + 12 =$ | 33  |
| 35 | のとき | $35 + 53 =$ | 88  |
| 48 | のとき | $48 + 84 =$ | 132 |
| ⋮  |     |             | ⋮   |

これらのことから、2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和について、どのようなことが予想できますか。前ページの予想のように、「～は、……になる」という形で書きなさい。

▲平成25年度 全国学力・学習状況調査 中学校数学B問題[2]

つ理由を知りたいとか、新たな事柄はないだろうかといった数学的探究へ生徒を誘います。そして、命題の形で明確に表現することは、新たな事柄を見いだす上での土台となります。事柄を予想した後は、見通しをもって（キャラクターの吹き出し



を参考にして), 事柄の成り立つ理由を説明する活動を行い(例2), 新たな事柄(問2)に取り組むことになるでしょう。

このような数学的探究は, 数学的な対象から事柄を予想し, その事柄が成り立つ理由を説明するための見通しをもち, 根拠を明確にして説明し, もとの命題の条件を変えるなどして新たな事柄を見いだす(発展的に考える)ことを繰り返す活動であると整理することができます。

★ 1, 4, 7 の3まいのカードで, 3けたの数をつくります。

① 1, 4, 7 ÷ 3 は, わりきれますか。  
② ①の数字を入れかえても, 3でわりきれるか調べましょう。

▲平成 27 年度版『小学算数 4 年上』P.125 (日本文教出版)

この問題は, 「各位の数の和が 3 の倍数である自然数は, 3 の倍数である。」という性質に基づくものです。そこで, 他の数字カードの組み合わせを含めていろいろな場合を調べることによって, 3 で割り切れる自然数をより深く理解することになるでしょう。数字カードを使った問題は, 豊かな数学的探究の場を与えることがあり, 誰もが学習の第一歩を踏み出せる問題設定が考えられます。予想した事柄を数学的な表現を用いて説明する活動では, 児童・生徒が思わず事柄を予想してしまうような問題を設定することが重要なポイントになります。

オープン性が高まりますが, 次の条件ではどのような事柄が予想されるでしょうか。

1 ~ 9 の 9 枚の数字カードの中から 4 枚を選んで, 右のように並べます。これを横と縦に見て, 2 けたの自然数を 4 つつくり, それらの和を求めます。右の場合であれば,  $52 + 19 + 51 + 29 = 151$  となります。

▲ The Mathematical Gazette / Volume 99 / Issue 546 / November 2015, p.386 (訳は著者による)

見つけよう

2けたの自然数と, その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差は, どんな数になるかを予想しましょう。

例 2 2けたの自然数の性質

上の①で調べたことから, 次のことが予想されます。

2けたの自然数と, その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差は, 9 の倍数になる。

このことがいつも成り立つことを, 文字を使って説明しましょう。

解答例 もとの自然数の十の位の数を  $x$ , 一の位の数を  $y$  とすると,

もとの数は  $10x + y$

入れかえた数は  $10y + x$  と表される。

もとの数と入れかえた数の差は

$$(10x + y) - (10y + x)$$

$$= 9x - 9y$$

$$= 9(x - y) \dots\dots \square \times (\text{整数})$$

$x - y$  は整数だから,  $\square(x - y)$  は  $\square$  の倍数になる。

したがって, 2けたの自然数と, その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差は, 9 の倍数になる。

問 2 2けたの自然数と, その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和は, どんな数になるかを調べ, 「～は, ……になる。」という形でかきなさい。

また, そのことがいつも成り立つことを, 文字を使って説明しなさい。

□の倍数であることをいうには  $\square \times (\text{整数})$  の形をつくらばいいね。

▲平成 28 年度版『中学数学 2』P.27 (日本文教出版)

### 3: 豊かな学習の場の設定

2けたの自然数と, その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和については, 2けたの自然数で割る計算を習った小学生なら, 事柄を予想できるかもしれません。日本文教出版の教科書『小学算数 4 年上』では, 1, 4, 7 の3枚の数字カードを使って3けたの数をつくり, その数が3で割り切れるかを調べる問題があります。

- ・ 和が最小(最大)になる数の並びは……である。
- ・ すべての場合を考えると, 和が(偶数/奇数)の方が多い(?)。
- ・ 和が100になる場合を作ることは(できる/できない)(?)。 など

まずは生徒に予想をさせ, 予想した事柄が正しいかどうかを考え, 説明する活動を設けてはいかがでしょう。

## 倍数判定法を利用した数あてパズル

●天理大学教授  
上田 喜彦



### 9の倍数判定法

このパズルでは、次のような9の倍数の判定法がうまく利用されています。

#### 【9の倍数の判定法】

各位の数の和が9の倍数である整数は、9の倍数である。

中学生であれば、次のように説明（証明）ができるでしょう。

万の位から順に位の数字を  $a, b, c, d, e$ 、とくと、5けたの整数は、

$$10000a + 1000b + 100c + 10d + e$$

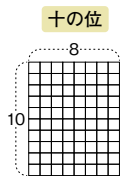
と表されます。

$$\begin{aligned} &10000a + 1000b + 100c + 10d + e \\ &= (9999 + 1)a + (999 + 1)b + (99 + 1)c + (9 + 1)d + e \\ &= (9999a + 999b + 99c + 9d) + (a + b + c + d + e) \\ &= 9(1111a + 111b + 11c + d) + (a + b + c + d + e) \end{aligned}$$

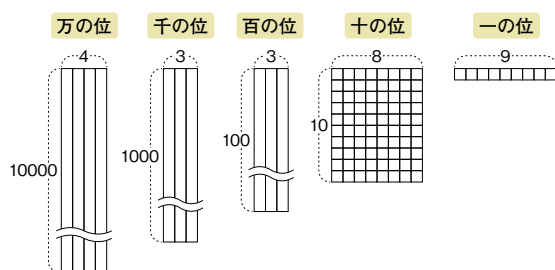
このとき  $9(1111a + 111b + 11c + d)$  は、明らかに9の倍数となるので、 $a + b + c + d + e$  が9の倍数であれば、元の数も9の倍数であり、9の倍数でなければあまりがあることになります。

小学生でも、教科書に載っているような図を使って次のように説明することが可能です。例えば、43389 という数について考えてみましょう。

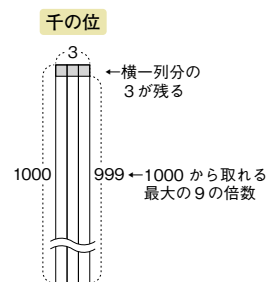
ここでは、80を表すときには、縦に10個並べ、それを横に8列並べて右のように表すことにします。



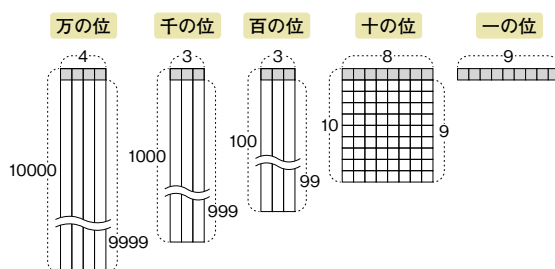
これと同じように 43389 を図に表すと、



9の倍数であるということは、43389 が9でわり切れるということですが、「9でわる」ということは「9を順にとっていく」ことなので、縦の列から一番大きい9の倍数をとっていきます。例えば、千の位ならばそれぞれの列で「1000 - 999」をして、横一列分の3個が残ります。



それぞれの位で同じようにすると



となります。

このとき、残った数（色を塗った部分）の和、すなわち、 $4 + 3 + 3 + 8 + 9$  が、9の倍数になっていれば、もとの数も9の倍数になることがわかります。43389 の場合は、各位の数字の和が27となりますから9の倍数です。

9の倍数の判定法自体は日常生活で役立つ場面がそう多いわけではありませんが、どうしてそうなるかを考えることは、知的好奇心を満足させて、深い学びにつながるよい題材ではないかと考えています。

このパズルを入口として、授業で「9の倍数の判定法」について考えてみるのはいかがでしょうか。

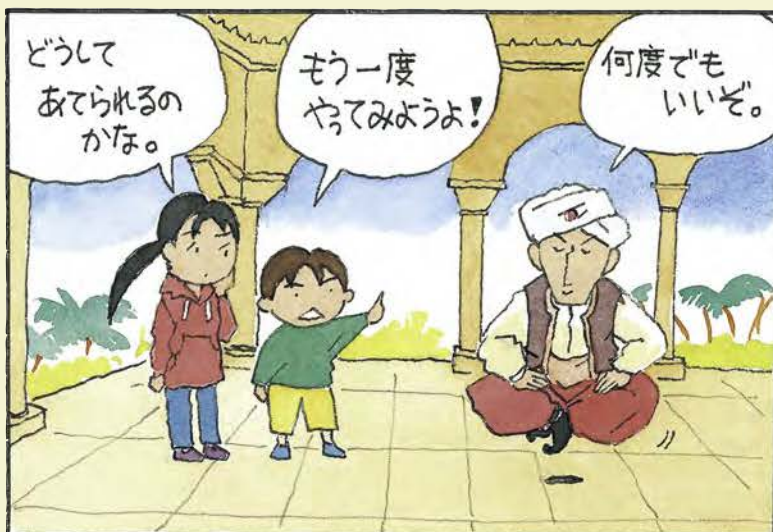
ところで、パズルのなかで、「Cは、どうして必ず9の倍数になるか」ということです…が、今回はちょっと紙幅に余裕がなさそうです。



# マテマ!R

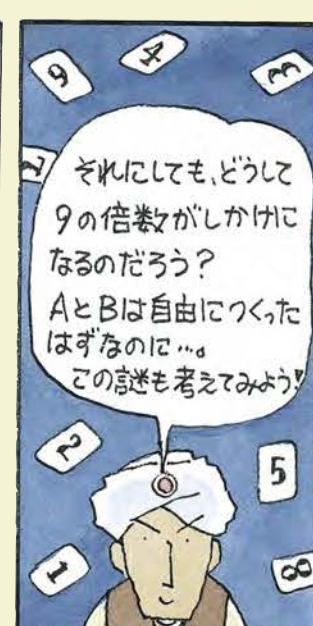
解答編

え・も・けが・ヨウ



|            |    |
|------------|----|
| $11 + 7 =$ | 18 |
| 14 24 7    |    |
| $18 + 9 =$ | 27 |
| 43 38 9    |    |
| $6 + 3 =$  | 9  |
| 11 31 3    |    |
| $14 + 4 =$ | 18 |
| 33 71 4    |    |

9の倍数



# 平成27年度版 小学算数 デジタル教科書 1年～6年

発売中



- 動いて動かして理解を深める、たくさんのシミュレーション
- 教科書の中心的な内容や問題などをクリックつで簡単拡大
- これまでのデジタル教科書にはなかった、多彩な算数ツール

## ■デジタル教科書サポートサイトのご案内

デジタル教科書の商品案内をはじめ、インストール手順やFAQ、操作方法、活用例、ご採用校様特典など、幅広いサポート内容となっています。最新情報も順次公開していますので、ぜひ日々のご活用にお役立てください。

日文 デジタルサポートサイト 検索

# 平成28年度版 中学数学 デジタル教科書 1～3

発売中



- 生徒の主体性を引き出し、理解を深める豊富なシミュレーション
- 教科書紙面に上書きした図などを1クリックで簡単表示
- 学ぶ意欲を高め、実感を伴った理解を助ける動画・アニメーション

## ■体験版のご案内

教科書紙面を表示しての実際の操作や、豊富な種類のコンテンツを体験できます。体験版(DVD-ROM)をご希望の方は、弊社Webサイト「ご要望・お問い合わせ」よりお問い合わせください。

※動作環境については、商品版と同じです。(サポートサイトをご確認ください)  
※商品版と内容が異なる場合があります。



CoNETS 版  
デジタル教科書

表示ソフトウェアは「CoNETSビューア」  
(株式会社日立製作所製品)を採用しています。

## ROOT Vol.19

日文教育資料[算数・中学校数学]

平成28年(2016年)10月31日発行

編集・発行人 佐々木秀樹

発行所 日本文教出版株式会社  
〒558-0041 大阪市住吉区南住吉4-7-5  
TEL: 06-6692-1261

本書の無断転載・複製を禁じます。

CD33327

## 日本文教出版 株式会社 http://www.nichibun-g.co.jp/

大阪本社 〒558-0041 大阪市住吉区南住吉4-7-5  
TEL:06-6692-1261 FAX:06-6606-5171  
東京本社 〒165-0026 東京都中野区新井1-2-16  
TEL:03-3389-4611 FAX:03-3389-4618  
九州支社 〒810-0022 福岡市中央区薬院3-11-14  
TEL:092-531-7696 FAX:092-521-3938  
東海支社 〒461-0004 名古屋市東区葵1-13-18・B  
TEL:052-979-7260 FAX:052-979-7261  
北海道出張所 〒001-0909 札幌市北区新琴似9-12-1-1  
TEL:011-764-1201 FAX:011-764-0690