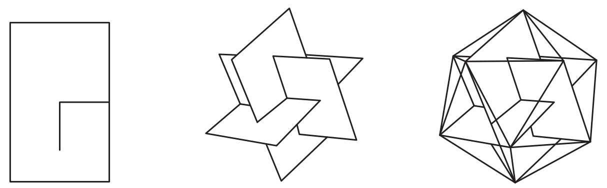
20 個くっつけると正二十面体になる」ことが正しいかどうかの判断ができませんでした。生徒には、「本当に正しいかどうかわからないので、しばらく時間をください」といって、結論を持ち越しました。

それからしばらく、同僚の先生方に聞いたり、調べたりしましたが、なかなか解決に至りませんでした。そのような中、東海大学教育開発研究所編集の『数学にさわろう！マセマティカル・アート展 inICME-9』という本に出会い、その中に、黄金比の３枚の名刺から正二十面体ができることが紹介されていました。



名刺の短い方の辺を１とし、正二十面体の頂点から中心までの距離を計算すると、約 0.951 となり、１よりも小さいことが分かりました。これはすなわち、１つの面の正三角形と中心を結んだ正三角錐は、正四面体にはならないことを意味します。正四面体を 20 個くっつけると正二十面体になったように見えましたが、実際には少々無理をして押し込んで糊でくっつけたからでした。

生徒からの質問を受けて、約２か月後にようやく解決し、そのことを生徒に説明し納得してもらいました。

それからしばらくして、１辺 $a$cm の正四面体と正二十面体の体積公式から説明することができることに気づきました。

１辺 $a$cm の正四面体の体積 $=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

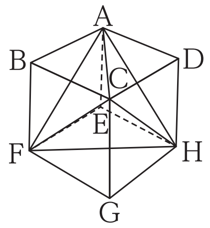
１辺 $a$cm の正二十面体の体積 $=\dfrac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$

$$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\times 20=\frac{5\sqrt{2}}{3}a^3>\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$$

１辺 $a$cm の正四面体の体積を 20 倍すると、１辺 $a$cm の正二十面体の体積よりも大きくなり、正四面体 20 個をくっつけても正二十面体にはならないことが分かります。

２　立方体の中にできる正四面体

下の図のように、立方体から４つの正三角錐 B-ACF、D-ACH、G-CFH、E-AFH を切り取ると、正方形の対角線を１辺とする正四面体 A-CFH ができます。



切り取った１つの正三角錐の体積は立方体の体積の $\dfrac{1}{6}$ より、この正四面体の体積は、立方体の体積の $\dfrac{1}{3}$ になります。

このことを活用して、例えば１辺が 12cm の正四面体の体積を求めることができます。対角線が 12cm の正方形の１辺は $6\sqrt{2}$ cm となり、その体積は、

$6\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}=432\sqrt{2}$ cm^3 です。

正四面体の体積はその $\dfrac{1}{3}$ なので、

$432\sqrt{2}\times\dfrac{1}{3}=144\sqrt{2}$ cm^3 となります。

正四面体の体積は教科書では取り扱われませんが、立方体との関係から簡単に求めることができるので、３年生の三平方の定理の活用として、是非とも紹介してもらいたいものです。

楽しい数学の授業をめざして Vol.04

日文 教授用資料

令和４年（2022年）９月１日発行

編集・発行人　佐々木秀樹

発行所　日本文教出版株式会社
〒558-0041　大阪市住吉区南住吉4-7-5
TEL：06-6692-1261

CD33605

日本文教出版 株式会社
https://www.nichibun-g.co.jp/

大阪本社　〒558-0041　大阪市住吉区南住吉4-7-5　TEL:06-6692-1261　FAX:06-6606-5171
東京本社　〒165-0026　東京都中野区新井1-2-16　TEL:03-3389-4611　FAX:03-3389-4618
九州支社　〒810-0022　福岡市中央区薬院3-11-14　TEL:092-531-7696　FAX:092-521-3938
東海支社　〒461-0004　名古屋市東区葵1-13-18-7F・B　TEL:052-979-7260　FAX:052-979-7261
北海道出張所　〒001-0909　札幌市北区新琴似9-12-1-1　TEL:011-764-1201　FAX:011-764-0690

楽しい数学の授業をめざして

Vol.04

今回のテーマ《 教科書で教える授業 》

教科書を教える授業から、教科書で教える授業へ

○　教科書で教える授業とは

私は先輩から「教科書を教える授業ではなく、教科書で教える授業を工夫せよ」とよく言われました。教科書を教える授業とは、教師主導で、新たな知識や例題による解法を説明し、それに関連した練習問題を教科書にそって指導していく授業のことです。教科書の教材は、精選されたものであり、教科書にそって、その内容を指導していけば、もれなく必要な内容を教えていくことができます。しかし、このような授業では、生徒の主体性や数学的な見方や考え方を養うこと、また、数学の有用性や美しさを実感させることは難しいと思います。教科書教材のよさを最大限に生かし、さらに、それぞれの先生のこだわりの教材も活用し、生徒主体の活動を工夫した授業が、教科書で教える授業だと考えています。

○　教科書の教材内容の順番

教科書採択により教科書が変わったりすると、これまで指導していた内容の順番が違っている場合があります。例えば、第３学年の２次方程式の解き方においては、中学校数学教科書７社のうち、因数分解による解き方、平方根の考えを使った解き方の順になっているのが５社、その逆になっているのが２社あります。この順序の長短はそれぞれあると思いますが、指導する教師がこの順序をどのように考え、また、生徒の実態からどちらが良いかを判断しなければなりません。教師の考えと教科書の順番が違っていても、生徒にその理由を説明して、教師の考えに沿った指導の順番を優先すべきだと考えます。

○　授業中の教科書の使い方

私は、いつも教科書を閉じさせた状態で授業をスタートさせ、学習課題を提示し、生徒の力で解決する展開を工夫してきました。練習問題で教科書を開け、新たな知識や技能の確認をします。例えば、第１学年の文字と式の導入では、文字式を使って数量を表すところまでは教科書を閉じておき、その後、教科書の本文から、文字式はすべての場合をまとめて表すという文字式の役割を読み取らせるようにしていました。教科書をうまく使い分け、生徒自身が数学を見いだし創り出していく授業を大切にしてきました。

著者　環（たまき）　修（おさむ）
元香川県公立中学校校長
元香川県中学校教育研究会数学部会長
現在、初任者指導、大学非常勤講師、町教育アドバイザー

正多面体の数学的な魅力

第１学年の、空間図形で取り扱う正多面体は、ギリシャ時代から知られていた立体であり、歴史的にも価値のある教材です。辺や頂点の数、さらに５種類しかないことなど、論理的思考が可能な素材がいろいろと含まれています。また、正多面体相互の関係にも興味深いことが多く、数学的な美しさを実感させることも可能です。

しかし、教科書での正多面体の扱いは、実際に立体を厚紙などを使って作成させ、定義を知らせ、面、辺、頂点についての構成表を完成させる程度で、上記の正多面体が持つ数学的に魅力のある内容にまでは至りません。

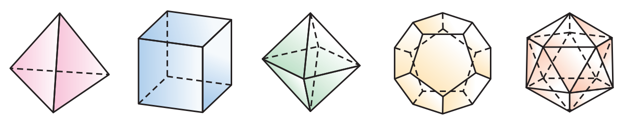
私は、正多面体の学習を最低でも２時間は確保し、生徒が性質を発見し、その仕組みや理由を探究していく活動をさせてきました。

○「正多面体」の授業の流れ

事前に厚紙などで正多面体を作成させ、各自が５種類の正多面体を持って授業に臨めるようにします。（教科書によっては、巻末に厚紙が用意されているものもあります。）

１　正多面体の定義を知る。

> 正多面体とは、すべての面が合同な正多角形で、１つの頂点に集まる面の数がどの頂点でも同じで、へこみのない多面体



正四面体　正六面体（立方体）　正八面体　正十二面体　正二十面体

２　正多面体についての次の表を完成させる。

正多面体	面の形	面の数	辺の数	頂点の数	1つの頂点に集まる面の数
正四面体	正三角形	4	6	4	3
正六面体	正方形	6	12	8	3
正八面体	正三角形	8	12	6	4
正十二面体	正五角形	12	30	20	3
正二十面体	正三角形	20	30	12	5

３　表をもとに、正多面体についての規則性や課題を考える。

【予想される規則性や課題】

①（辺の数）

＝（１つの面に含まれる辺の数）×（面の数）÷２

②（頂点の数）

＝（1つの面に含まれる頂点の数）×（面の数）÷（1つの頂点に集まる面の数）

③正多面体は５種類だけか

④（面の数）＋（頂点の数）－（辺の数）＝２

《オイラーの多面体定理》

⑤正六面体と正八面体、正十二面体と正二十面体の双対性について

４　自分で課題を選択し、それを追究する。

（1）各自で考える

（2）同じ課題を選択した者同士で確認する

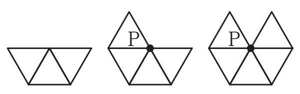
５　課題追究の結果を全体に発表する。

（1）①（辺の数）、②（頂点の数）の計算式の意味を説明する。

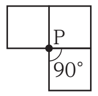
（2）③正多面体は５種類しかないことを説明する。

○正多面体の１つの頂点の条件より

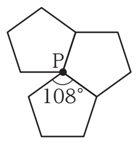
・面が正三角形の場合



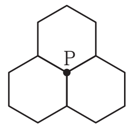
・面が正方形の場合



・面が正五角形の場合



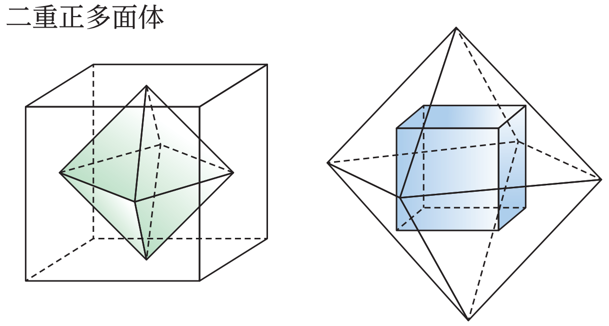
・面が正六角形の場合



（3）⑤双対性について説明する。

正多面体	面の数	辺の数	頂点の数
正六面体	6	12	8
正八面体	8	12	6

二重正多面体



（4）④オイラーの多面体定理について説明する。

６　学習の振り返り

・正多面体の中にたくさんの規則性や課題が見つかった。

・正多面体が５種類しかないことの説明がうまくできた。

○　実践授業を振り返って

授業に当たっては、厚紙などを使って正多面体を作成させ、生徒一人ひとりが５種類の立体を持って進めます。

①（辺の数）や②（頂点の数）を計算で求める式については、辺や頂点の重なりを考え、その式の意味をしっかりと説明できるようにすることが大切です。例えば、「（正二十面体の頂点の数）＝3×20÷5＝12 となります。この式の意味は、正三角形の頂点は３つあり、それが 20 個あるので 3×20 となり、１つの頂点ができるのに、５つの面の頂点が重なっているので、3×20 を５で割れば頂点の数が求められます」といった説明ができるようにしたいものです。

③正多面体が５種類しかないことの説明は、１つの頂点に集まる面の形と数に着目して、調べていきます。１つの頂点に集まる面の数は３つ以上で、その角の合計が360°未満にならなければなりません。この条件で、正三角形の場合が３種類、正方形の場合が１種類、正五角形の場合が１種類、正六角形の場合には角の合計が 360°になり、立体になりません。これらのことより、正多面体は５種類しかないことが確かめられます。

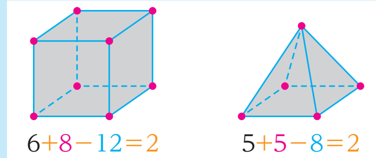
⑤双対性については、正六面体と正八面体について、面の数と頂点の数がそれぞれ等しいことより、図のように正六面体の中に正八面体ができ、またその逆に、正八面体の中に正六面体ができることになります。正十二面体と正二十面体についても同様のことがいえます。二重正多面体の模型を提示できれば、よりイメージがしやすくなります。

④オイラーの多面体定理については、正多面体以外の多面体でも成り立つことを紹介しますが、その証明については難しいので深入りしないようにしています。なお、数学者オイラーについては是非紹介してもらいたいと思います。

オイラーの多面体定理

へこみがない多面体は、すべて次の式で表される性質を持っています。

（面の数）＋（頂点の数）－（辺の数）＝２



数学者オイラー（1707 ～ 1783）は、多面体定理のほかにも一筆がきの研究やオイラーの公式に代表されるさまざまな業績を残しています。

（算数・数学情報誌 ROOT No.23『数学偉人伝』）

オイラーの公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$e^{i\pi}=-1$$

○　生徒の振り返り

○　正多面体の新たな課題

１　生徒から出た質問

【翌日】

質問の翌日、その生徒が実際に同じ大きさの正四面体を 20 個作り、それを糊付けして「正二十面体ができました」と言って持ってきました。それを見る限り、本当にできているのかと思いましたが、「正四面体を