日文 教授用資料

楽しい数学の授業をめざして Vol.05

今回のテーマ 《 意味理解を大切にした指導 》

意味理解を大切にした指導で、より確かな資質・能力の定着へ

方程式を解くとき、なぜ、移項してもよいのですか

方程式の解き方で、xの項を移項して左辺に集めると決まっているからです。

○ 「なぜ」にこだわる意味理解

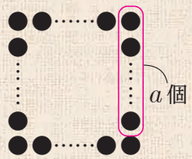
方程式の解き方が一通りできるようになった頃に「なぜ、移項してもいいのですか」「なぜ、移項すると符号が変わるのですか」と生徒に聞くと、「方程式を解くときの決まりだから」と何の疑いもなく、その手順だけを覚えていて、その意味や理由を説明することができない場合がよくあります。数学は、解き方を暗記し、それに沿って解けるようになればいいと思っている生徒が多くいます。そのような生徒は、少し条件が異なる問題が出るとまったく解けないといったことが起こります。一つ一つの解き方の手順に「なぜ」そうするのかといった疑問を持ち、その意味をしっかりと理解できるようにしておくことが大切です。

生徒が「なぜ」にこだわった学習ができるようになっていくと、自然と主体的な取り組みができ、それぞれの学習内容の意味や数学的な見方・考え方のよさも理解でき、数学への興味・関心も高まってきます。

今回は、意味理解を大切にした「なぜ」にこだわった指導のあり方を紹介します。

① 文字式を用いることの意味理解

文字式の導入では、マッチ棒を正方形状に並べたり、碁石を正三角形や正方形状に並べて、マッチ棒の本数や碁石の数を、文字を使った式で表したりする場合が多いです。



碁石を正方形状に並べる場合、1辺の碁石の数をa個とすると、碁石の総数は、$4\times a-4$という式で表すことができます。ここで、この式がどんな意味を持つかを、教科書の文章から読み取らせる活動をさせ、文字式の役割や意味を表したところに印を付けさせます。「すべての場合をまとめて1つの式で表している」「求め方を表している」「求めた結果を表している」等の意味を読み取らせ、文字式は、これから学習する数学の中でとても重要な役割を果たすことを知らせます。

2年生で学習する整数の性質の証明において文字を使う際にも、文字式がすべての整数の場合についてまとめて1つの式で表しているので、文字を使って説明することで、すべての場合の説明ができたことを理解させることが可能になります。

本資料は、一般社団法人教科書協会「教科書発行者行動規範」に則り、配布を許可されているものです。

日文の実践事例、教科情報 詳しくはWebへ! 日文 検索

※本冊子掲載QRコードのリンク先コンテンツは予告なく変更または削除する場合があります。
※QRコードは、株式会社デンソーウェーブの登録商標です。

未来をになう子どもたちへ 日本文教出版

著者 環（たまき） 修（おさむ）
元香川県公立中学校校長
元香川県中学校教育研究会
数学部会長
現在、初任者指導、
大学非常勤講師、
町教育アドバイザー

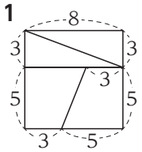
証明の必要性を実感させる授業例

「不思議なタイル」の授業は、証明の必要性を実感させるために、本格的な論証指導が始まる前に実践してきたものです。「なぜ、面積が変わるのか」という疑問をもち、意欲的に取り組める授業です。

○ 「不思議なタイル」の授業の流れ

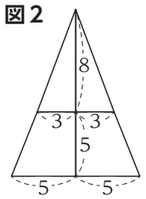
(1) 図1の1辺8cmの正方形を、図のように4枚のタイルに分け、並びかえて新たな図形を考える。

図1



(2) 並びかえた図2の図形と、もとの正方形との面積を比べる。
①正方形の面積 8×8=64
②図2の面積 10×13÷2=65

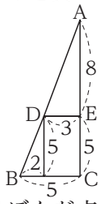
図2



(3) 図1の正方形と図2の図形の面積が1だけ異なる理由を考える。
①図2の図形が本当に三角形かどうかを調べる。
②3点A、D、Bが同一直線上の点かどうかを確認する。

BDの傾き$=\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$

DAの傾き$=\frac{8}{3}=\frac{16}{6}$



③点Dは、直線ABに対して、くぼんだ点か飛び出した点かを確認し、面積が1だけ増えた理由を説明する。

(4) 証明の必要性を知る。

> 見たり、測ったりしただけでは本当に正しいかどうかはわからないので、筋道を立てて説明することが必要である。すなわち、証明が必要である。

○ 授業実践を振り返って

この授業では、図1のような正方形の紙を各自に配布し、ハサミで4枚のタイルに切らせて、出来るだけ単純な図形に並びかえさせます。生徒は、図2以外に、下の図3、4のような図形を考えると予想されますが、傾きに着目して解決させる都合上、図2に限定して考えさせました。

図3

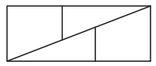
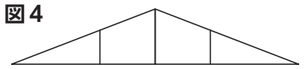
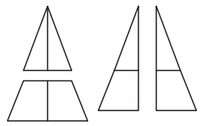


図4



生徒は、図2の図形を二等辺三角形だと思って面積を計算しますが、あえて、二等辺三角形とは言わずに「図2の図形」という表現に気を付けました。

面積が64と65になり、異なることに疑問を持ったときに「あれ、同じタイルを並びかえただけなのに、なぜ面積が1だけ違うのかな」と発問し、生徒の課題意識を高めました。



課題解決に向けては、図2の図形を上下、左右に分けて面積を求めさせ、左右に分けたときに面積が図1と異なることより、つなぎの部分に問題があることに気付かせ、方眼上に図をかいて傾きを調べさせました。さらに、傾きの大小より、くぼんでいるのか、飛び出しているのかを判断させ、面積が左右それぞれ0.5ずつ大きくなり、全体で1増えていることの説明をさせました。

最後に、授業を振り返り、「最初は見ただけで二等辺三角形だと思ってしまいましたが、それは正しくなかったです。本当に正しいかどうかは、根拠に基づき、筋道立てて説明しなければなりませんでした。それが、これから勉強していく証明だと分かりました」と、証明の必要性を実感していました。

楽しい数学の授業をめざして Vol.05
日文 教授用資料
令和4年(2022年)12月1日発行
編集・発行人 佐々木秀樹
発行所 日本文教出版株式会社
〒558-0041 大阪市住吉区南住吉4-7-5
TEL：06-6692-1261

本書の無断転載・複製を禁じます。

CD33611

日本文教出版 株式会社
https://www.nichibun-g.co.jp/

大阪本社 〒558-0041 大阪市住吉区南住吉4-7-5 TEL:06-6692-1261 FAX:06-6606-5171
東京本社 〒165-0026 東京都中野区新井1-2-16 TEL:03-3389-4611 FAX:03-3389-4618
九州支社 〒810-0022 福岡市中央区薬院3-11-14 TEL:092-531-7696 FAX:092-521-3938
東海支社 〒461-0004 名古屋市東区葵1-13-18-7F・B TEL:052-979-7260 FAX:052-979-7261
北海道出張所 〒001-0909 札幌市北区新琴似9-12-1-1 TEL:011-764-1201 FAX:011-764-0690

②　方程式を解く際の移項の意味理解

$$5x = 3x + 6 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$
$$5x - 3x = 6 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$
$$2x = 6$$
$$x = 3$$

方程式を解く際に、式①から式②への変形では x の項を左辺に集めるために、$3x$ を右辺から左辺に移項し、$-3x$ となります。ここで「なぜ、$3x$ を移項してもいいのですか」「なぜ、$3x$ が $-3x$ になるのですか」と聞くことにしています。

このとき、移項という操作の意味を理解し、なぜ移項してもよいか、なぜ符号が変わるかを説明できる生徒はあまりいません。移項を初めて学習した際には、移項という操作は、等式の性質をもとに、両辺に同じ数をたしたり、両辺から同じ数をひいたりしても等式が成り立つことをもとに、その操作を簡単にしたものであり、結果的に符号を変えた項が反対の辺に残るという操作であると理解しているはずです。等式の性質や移項の意味をしっかりと理解させ、方程式を解く技能をより確かなものにしてもらいたいです。

③　連立方程式、２次方程式の解き方の意味理解

１年生で、１元１次方程式を解くということは、移項によって $ax = b$ の形の方程式に変形し、x の係数が１になるように両辺を a で割って、$x = \dfrac{b}{a}$ という解を求めることだと理解させています。

この方程式を解くという意味をもとに、連立２元１次方程式の解き方を考えた場合、既習の１元１次方程式に帰着させるために、x と y の２つの文字のうち、１つの文字を消去すればよいことに気づかせます。その方法として、加減法、代入法による解き方ができるようにしていきます。

２次方程式の解き方についても、２次式の次数を減らして、既習の１元１次方程式に帰着させる方法を考えさせます。その１つの方法が、因数分解によって１次式の積に変形し「ＡＢ＝０ならば、Ａ＝０またはＢ＝０」であることを用いるものです。もう１つの方法が、等式の変形により $x^2 = k$ の形を導き、平方根の考えを用いるものです。

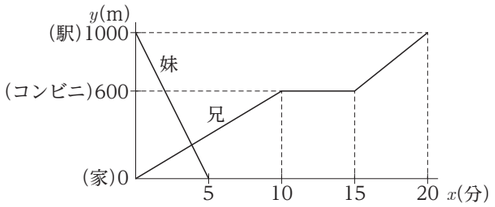
また、２次方程式の解の意味は、これまでの方程式と同様ですが、２次式を２つの１次式にして解を求めることより、解が２つあることの意味についても理解できるようにします。

さらに、２次方程式の解の公式を使って方程式が解けるようになることの意味についても確認します。中学校になって学習してきた代数的な内容である正の数・負の数、文字式、平方根の全ての計算が使われています。すなわち、２次方程式の解の公式が、中学校で学習する代数のゴールだと考えることもできます。生徒に、その価値や意味に気付かせることも大切です。

④　日常事象の中のグラフの意味理解

兄は家から 1000m 離れている駅に向かって歩き、同時に妹は駅から家に向かって自転車に乗って行きました。途中、兄は家から 600m の所にあるコンビニで買い物をしました。

次の図は、兄が自宅を出てからの時間 x 分と、その道のり y m の関係と、妹の移動する様子を表したグラフです。



１次関数の活用として、１次関数のグラフから、実際の移動の様子を読み取る授業を行ってきました。まず、グラフを見せ、グラフのそれぞれの部分がどのような意味を持つかを読み取らせます。兄の家からコンビニまでの移動、コンビニでの買い物、コンビニから駅までの移動、妹の駅から家までの移動、それぞれの状況がグラフのどの部分にあたるかを確認します。

その後、兄役と妹役の生徒を決めて、黒板の左側を家、途中にコンビニ、右側を駅として、実際にその動きを再現させました。兄と妹が出会う所、兄のコンビニまでの速さと、コンビニからの速さの違いも意識させ、グラフの交点や傾きの意味を理解させます。グラフと実際の動きとが一致することで、１次関数のグラフの意味をより確かなものにすることができます。

⑤　証明の必要性と意味理解

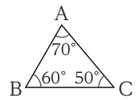
２学年の図形学習において、本格的な証明を取り扱うようになりますが、その意味や必要性を十分に理解できないまま学習が進められ、結果的に証明が分からない、証明が苦手という生徒が多くなってしまいます。そこで、図形指導の早い段階で、証明の意味やその必要性を自覚できる機会を作るようにしてきました。

図形学習の最初の角と平行線では、証明という言葉を使わずに、筋道立てた説明を大切にします。すでに正しいと認められていることから新たなことを導き出す過程を説明させ、徐々に証明を意識させていきます。

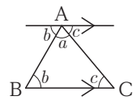
さらに、すべての場合に成り立つことを説明するのが証明であるという意味を「三角形の内角の和は 180°である」ことの説明を通して理解できるようにしました。

「三角形の内角の和は 180°である」ことは、小学５年生で学習し、そこでは、観察、操作や実測などの活動を通して、３つの内角を集めて 180°であることを確かめてきました。中学２年生では、その活動を振り返りながら、「三角形の内角の和は 180°である」ことの説明の方法を考えさせます。授業においては、次の２つの説明を示します。

①３つの角の大きさをそれぞれ測って、その和を求める。
∠Ａ＝70°∠Ｂ＝60°∠Ｃ＝50°
∠Ａ＋∠Ｂ＋∠Ｃ＝180°



②平行線を引き、１つの頂点に３つの内角を集めて 180°であることを説明する。



どんな三角形でも内角の和が 180°であることの証明として①、②の説明でよいかどうかを考えさせます。①は形の異なるたくさんの三角形について同じように調べなければなりません。②は、三角形の形が変わっても、いつも同じように考えることができます。したがって、①では証明したことにならず、②の説明が証明になることを理解させていきました。

⑥　サイコロの目の出る確率の意味理解

サイコロを１回投げて、１の目が出る確率はいくらですか。

６通りのうちの、１通りなので、確率は $\dfrac{1}{6}$ です。

生徒は、迷わず $\dfrac{1}{6}$ と答えますが、さらに、「サイコロを１回投げて、１の目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ とは、どういう意味ですか」と聞くと、「サイコロを６回投げると、そのうち１回は必ず１の目が出る」と答える生徒が多くいます。そこで、確率が $\dfrac{1}{6}$ である意味を、改めて選択肢を示して考えさせます。

①６回投げると、そのうち１回は必ず１の目が出る。
②５回投げて、１の目が１回も出なければ、６回目には必ず１の目が出る。
③６回投げると、１から６までの目が必ず１回ずつ出る。
④ 30 回投げると、１の目は必ず５回出る。
⑤ 6000 回投げると、１の目はおよそ 1000 回出る。

確率の導入時に行った、実際の多数回の試行で、ある事柄の起こる回数の割合が一定の値に近づいていくとき、その値をある事柄の起こる確率ということを思い出させ、正解が⑤であることを判断できるようにします。実際にサイコロを多数回振ると、１～６のそれぞれの目が出る回数の割合はどの目についても $\dfrac{1}{6}$ に近づいてきます。このように、統計的確率の意味を十分理解させた上で、さらに、起こりうるどの場合も同様に期待されるとき「同様に確からしい」ということを知り、この条件のとき、起こりうる場合の数を数えることによって、確率が求められるという数学的確率の意味を理解できるようにしていきます。

指導にあたっては、統計的確率や数学的確率という用語は使いませんが、双方の意味を関連付けて、求めた確率の意味を理解できるようにしてきました。